This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

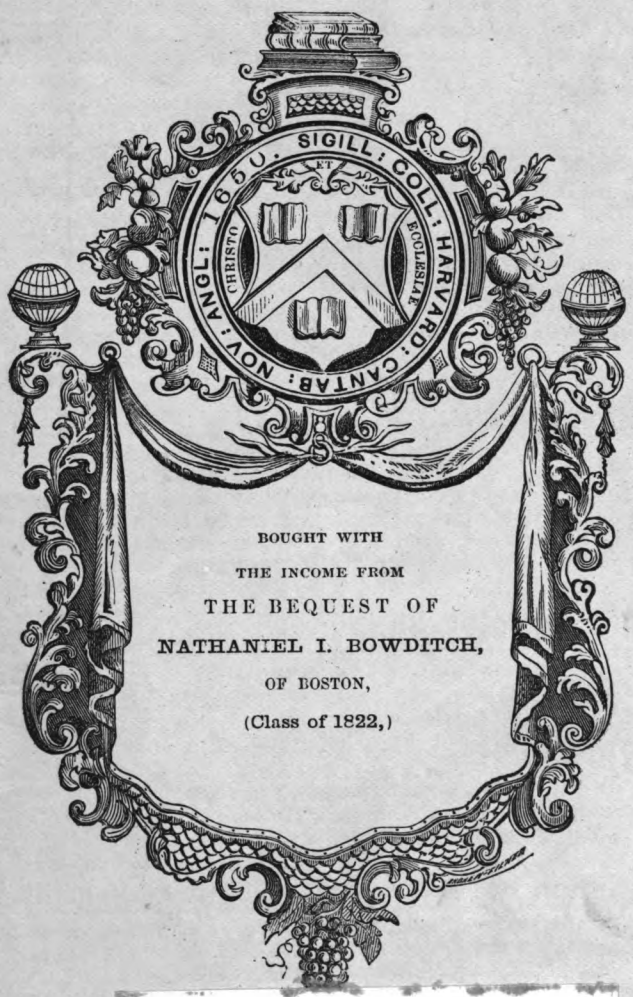
Ludwig Kambly

Mathematisches Unterrichtswerk

Erster Teil: Arithmetik

Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht

Ferdinand Hirt in Breslau



Verlag von Ferdinand Hirt in Breslau.

Kamblys Mathematisches Unterrichtswerk.

(Neubearbeitung)

math 499.08

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.

CHRISTO ET ECCLESIAE

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

SCIENCE CENTER LIBRARY

auf Grund
Geb. 2 M.
sien mit
Arithmetik.
sgabe der
01. Lehr-
alschule.)
hen Plani-
m Anhang:
. 23.—26.
. 2 M.
sgabe der
901. Lehr-
der plani-
n Trigono-
30. Auflage
Vollständig
Trigono-
ehraufgabe
atenbegriff
32. Auflage
Trigono-
. 1,55 M.
). Auflage.
gsaufgaben
gabe der
uf weiteres
Roeder.
h den preu-
l. Sonder-
geh. 60 Pf.
Prima der
Planimetrie.
60 Pf.
Kart. 1 M.
u 1 5 M.

Aufgaben aus

Gesamtverbreitung
der Kamblyschen Mathematischen Unterrichtsbücher über 850000 Bände.

III.08.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Kambly, Ludwig

Kambly-Langguth

Arithmetik und Algebra

Nach den preußischen Lehrplänen
von 1901 umgearbeitet von

Professor Dr. A. Thaer
Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentore zu Hamburg

Ausgabe B: Für Oberrealschulen, Realgymnasien und Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht

39. Auflage
der Kamblyschen Arithmetik und Algebra

Mit 52 Figuren im Text

Ferdinand Hirt
Königliche Universitäts- und Verlagsbuchhandlung
Breslau 1908

Digitized by Google

Math 499.08
~~509.08~~

Bowditch Fund

Alle Rechte vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort.

Das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Ludwig Kambly wurde in seiner 34. Auflage von Direktor Dr. Hugo Langguth einer gründlichen Umarbeitung unterworfen. Nach dem Tode dieses Herrn übernahm der Unterzeichnete auf Wunsch des Herrn Verlegers die Bearbeitung der neuen Auflage.

Verleger und Herausgeber waren über folgende Grundsätze einig: 1. Die neue Auflage muß unbedenklich neben der alten gebraucht werden können. 2. Den Lehrplänen von 1901 muß genügt werden. 3. Der Entwickelung von Wissenschaft und Methodik im letzten Jahrzehnt soll Rechnung getragen werden.

Um der ersten Forderung zu genügen, ist, abgesehen vom Anhang, die Einteilung in Kapitel und Paragraphen und die Numerierung der Formeln durchweg, Inhalt und Form der einzelnen Abschnitte mit Ausnahme der Einleitung im wesentlichen beibehalten.

Bei dem reichen Inhalt der Langguthschen Bearbeitung konnte den Lehrplänen meist durch Kürzungen genügt werden, so besonders in den Kapiteln über Kubikwurzeln, Kettenbrüche, Kombinationen. Dem „wiederholenden Aufbau des arithmetischen Lehrganges" ist der zweite Abschnitt des Anhanges gewidmet.

Dieser soll zugleich der Forderung genügen, „den Schüler möglichst früh an das funktionale Denken zu gewöhnen", die von der Unterrichtskommission der Deutschen Naturforscherversammlung unter Vorsitz des Herrn Professor Guzmer und von Herrn Geheimrat Klein in seinem Buche „Der mathematische Unterricht" (1907) aufgestellt wurde, und die zum Teil schon durch die Herren Schülke, Götting, Walter Schmid und J. Schröder in die Praxis übersetzt ist. Dem letztern Herrn verdankt der Herausgeber besonders wertvolles, bisher noch nicht veröffentlichtes Material. Einem mathematischen Reformunterricht würde, auch auf Gymnasien, schon in den Mittelklassen der Abschnitt Analysis zugrunde zu legen sein, selbstverständlich mit geeigneten Auslassungen und Ergänzungen aus den Abschnitten Arithmetik und Algebra.

Als notwendiger Abschluß ergibt sich hierbei die Einführung in die Differentialrechnung (III. Abschnitt des Anhanges), die auch den Gymnasien nicht auf die Dauer wird vorenthalten werden können. Die Behandlung im Anhang zeigt, daß es möglich ist, das sonst so zersplitterte Pensum der Prima der Realanstalten (kubische Gleichungen, Reihen, Maxima und Minima) einem einheitlichen Lehrgang einzuordnen.

Digitized by Google

Der erste Abschnitt des Anhanges, die Versicherungsrechnung, ist für Oberrealschulen bestimmt. In Österreich gehört diese längst zum Pensum der Schulen; auch in Deutschland haben sich gewichtige Stimmen für Einführung dieses Abschnittes unter Kürzung der Lotterie- und Skataufgaben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhoben. Auf Herrn M. Cantors „Politische Arithmetik" soll hier besonders hingewiesen werden.

Eine wesentliche Errungenschaft der Arbeiten der Herren Dedekind und M. Pasch ist die Erkenntnis, daß für den Lehrer ein tieferes Eindringen in das Wesen der Zahl und ihre Eigenschaften erforderlich ist, daß aber ein Lehrbuch für Schüler den Forderungen der Wissenschaft nicht genügen kann. Man muß sich mit Annäherungen an den Standpunkt der Wissenschaft begnügen. Die Grenze ist von Lehrer und Schüler abhängig. Das Ziel der vorliegenden Darstellung war, Durchschnittsschülern noch faßlich zu sein, aber dem Lehrer für eine vertiefende Durchnahme kein Hindernis in den Weg zu legen.

Geschichtliche Hinweise, die in den früheren Auflagen fehlten, sind in sehr bescheidenem Umfange geboten. Sie setzen voraus, daß der Lehrer sich aus Herrn J. Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik, aus der durchweg die Notizen entnommen sind, das zur Belebung des Unterrichts so außerordentlich förderliche Material verschafft.

Um die neue Auflage mit der alten vergleichen zu können, sei darauf hingewiesen, daß die §§ 1, 5, 19, 21, 24, 57 Erweiterungen, 61—63, 100—102 wesentliche Kürzungen enthalten. Erwähnenswerte Änderungen sind in den §§ 13, 30, 45, 49, 53, 64 vorgenommen. Der Anhang ist umgearbeitet.

Mit einem Stern (*) sind einerseits solche Paragraphen bezeichnet, welche bei einer schnelleren Durchnahme fortgelassen werden können, andrerseits aber auch solche, die methodisch an anderer, im allgemeinen späterer Stelle zu besprechen sind. Es ist ja ein unzweifelhafter Vorzug der systematischen Lehrbücher vor den methodischen, daß sie dem Lehrer mehr Freiheit lassen. Auf diese hinzuweisen, nicht um sie einzuschränken, sind die Sternchen hinzugefügt.

Das Lehrbuch enthält, wie in den früheren Auflagen, keine Übungsaufgaben, sondern nur einige ausgeführte Musterbeispiele, besonders im Anhang. Neben den bekannten Aufgabensammlungen sei besonders auf die im Anschluß an die Kamblysche Arithmetik bearbeitete Aufgabensammlung des Herrn Prof. Wimmenauer hingewiesen.

Hamburg, im Januar 1908.

Dr. H. Thaer.

Digitized by Google

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung. Allgemeine mathematische Vorbegriffe (§ 1 bis § 5) 7

I. Abschnitt. Die vier ersten Rechnungsarten in absoluten Zahlen.

1. Kapitel. Von der Addition und Subtraktion (§ 6 bis § 12) 14
A. Von der Addition. B. Von der Subtraktion.

2. Kapitel. Von der Multiplikation und Division (§ 13 bis § 22) 22
A. Von der Multiplikation. B. Von der Division.

II. Abschnitt. Die vier Spezies in relativen Zahlen, nebst Null und Unendlich.

1. Kapitel. Von der Null und dem Unendlichen (§ 23 und § 24) 40

2. Kapitel. Von den relativen Zahlen (§ 25 bis § 30) 44
A. Positive und negative Zahlen. B. Addition. C. Subtraktion. D. Multiplikation. E. Division.

III. Abschnitt. Anwendungen der vier Grundrechnungsarten.

1. Kapitel. Die vier Spezies mit dekadischen Zahlen (§ 31 und § 32) . . 54

2. Kapitel. Von den Dezimalbrüchen (§ 33 bis 37) 55

3. Kapitel. Von der Teilbarkeit ganzer Zahlen (§ 38 bis § 41) 58

4. Kapitel. Von den Proportionen (§ 42 bis § 44) 64

IV. Abschnitt. Rechnungsarten der dritten Stufe.

1. Kapitel. Von der Potenzierung (§ 45 bis § 48) 68
A. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten. B. Potenzen, deren Exponent Null oder negativ ist.

2. Kapitel. Von der Radizierung (§ 49 bis § 55). 72

3. Kapitel. Von den imaginären und komplexen Zahlen (§ 56 bis § 61) . 80
A. Rein imaginäre Zahlen. B. Komplexe Zahlen.

4. Kapitel. Anwendungen auf Polynome, insbesondere auf dekadische Zahlen (§ 62 und § 63) 92
A. Das Ausziehen der Quadratwurzel. B. Das Ausziehen der Kubikwurzel.

5. Kapitel. Von den Logarithmen (§ 64 bis § 70) 96

Digitized by Google

Seite

V. Abschnitt. Von den Bestimmungsgleichungen.

1. Kapitel. Einleitung (§ 71 bis § 73) 108

2. Kapitel. Von den Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten (§ 74 bis § 76) 110

A. Auflösung derselben. B. Auflösung der in Worten gegebenen Gleichungen.

3. Kapitel. Von den Gleichungssystemen des ersten Grades mit zwei und mehreren Unbekannten (§ 77 bis § 82) 115

A. Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten. B. Determinanten. C. Gleichungen des ersten Grades mit drei und mehreren Unbekannten.

4. Kapitel. Von den quadratischen Gleichungen (§ 83 bis § 88) 122

A. Auflösung der quadratischen Gleichungen. B. Zurückführung von Gleichungen höherer Grade auf quadratische. C. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

5. Kapitel. Von den Exponentialgleichungen (§ 89) 130

6. Kapitel. Von den sogenannten Diophantischen Gleichungen (§ 90 u. § 91) 131

VI. Abschnitt. Die Progressionen und Kettenbrüche nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Von der arithmetischen Reihe (§ 92 bis § 94) 134

2. Kapitel. Von der geometrischen Reihe (§ 95 und § 96) 136

3. Kapitel. Von der Zinseszins- und Rentenrechnung (§ 97 bis § 99) . . 140

4. Kapitel. Von den einfachen Kettenbrüchen (§ 100 bis § 103) 143

VII. Abschnitt. Die Kombinationslehre nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Von den Permutationen (§ 104 bis § 106) 148

2. Kapitel. Von den Kombinationen (§ 107 bis § 110) 150

A. Variationen. B. Kombinationen.

3. Kapitel. Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung (§ 111 und § 112) . . . 152

4. Kapitel. Von der geteilten fallenden Faktoriellen und dem binomischen Lehrsatze (§ 113 bis § 115) 155

Anhang.

VIII. Abschnitt. Versicherungsrechnung 162

IX. Abschnitt. Analysis 173

X. Abschnitt. Differentialrechnung 198

Schluß. Formelsammlung 237

Digitized by Google

Einleitung.

Allgemeine mathematische Vorbegriffe.

§ 1.*

Die Zahl.

Die reine Mathematik umfaßt die Zahlenlehre und die Raumlehre. Während die Zahlenlehre sich nur mit der Größe (Quantität) beschäftigt, betrachtet die Raumlehre neben dieser auch die Gestalt (Form). Die Gegenstände dieser Betrachtungen nennt man Größen und Gestalten.

Für die Raumlehre ist der umfassende Name Geometrie gebräuchlich.

Für die Zahlenlehre ist kein zusammenfassender Name allgemein anerkannt, man bezeichnet sie nach einem oder mehreren ihrer Teile als Arithmetik, Algebra oder Analysis.

In der Schulmathematik ist es üblich, diese drei so gegeneinander abzugrenzen, daß die Arithmetik die Lehre von den Operationen, die Algebra die Lehre von den Gleichungen, die Analysis die Lehre von den Funktionen enthält. Da aber alle Eigenschaften der Zahlen durch Gleichungen ausdrückbar sind, wird die Einteilung schärfer, wenn man unter Arithmetik die Lehre von den identischen Gleichungen, unter Algebra die Lehre von den Bestimmungsgleichungen, unter Analysis die Lehre von den analytischen Gleichungen versteht. Der Unterschied der drei Gleichungsarten sei hier nur durch die Beispiele: $x + y = y + x$, $x + 5 = 7$, $x + y = 1$ erläutert, wobei das Gleichheitszeichen (nach J. E. Böttcher) verschieden zu lesen ist, nämlich „ist" bei den identischen, „sei" bei den Bestimmungs-, „bleibe" bei den analytischen Gleichungen.

Die Grundlage der Zahlenlehre ist die Zahl. Die geschichtliche wie die seelische Entstehung der Zahl kann Anfängern nicht streng wissenschaftlich dargestellt werden. Für diese mögen die folgenden Betrachtungen genügen, die sich an L. Kroneckers und M. Paschs Arbeiten anschließen.

In jeder Sprache ist eine Reihe von Wörtern, die Zahlwörter, festgelegt, im Hochdeutschen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. Diesen Zahlwörtern entsprechen eine Reihe von Zeichen, die Ziffern; als solche benutzt man seit ungefähr vierhundert Jahren international die sogenannten arabischen Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Entstanden sind diese wahrscheinlich aus den Anfangsbuchstaben der indischen Zahlwörter und nach Umbildung durch die Araber von Gerbert († 1003 als Papst Silvester) im Abendlande bekannt gemacht; doch waren bis 1600 für 4, 5 und 7 von den heutigen abweichende Zeichen in Gebrauch.

Digitized by Google

Verbindet man eine Reihe voneinander getrennter, aber untereinander gleichartiger und aufeinander folgender Sinneseindrücke, z. B. gehörte Kanonenschüsse, gefühlte Pulsschläge, nacheinander gesehene Bäume, derart mit den Gliedern der Reihe der Zahlwörter, daß jedem Sinneseindruck ein Zahlwort zugeordnet wird, so nennt man diese Tätigkeit *zählen* und das letzte zugeordnete Zahlwort die *Anzahl* der Sinneseindrücke. Je nachdem man dieser Anzahl die Benennung der Sinneseindrücke hinzufügt oder sie fortläßt, hat man eine *benannte* oder eine *unbenannte* (reine) Zahl gewonnen. Bei der *reinen Zahl* sieht man von der Art des Sinneseindrucks ab und nimmt an, daß alle folgenden Eindrücke mit dem ersten vollständig übereinstimmen, abgesehen von ihrer zeitlichen Verschiedenheit. Solche Eindrücke nennt man abstrakte *Einheiten* oder *Einsen*. Das Zusammenfassen mehrerer Einheiten zu einem neuen Begriff führt zur *Zahl*.

Erhält man beim Abzählen verschiedener Reihen von Sinneseindrücken für den letzten jedesmal dasselbe Zahlwort, so sagt man, die beiden Anzahlen sind gleich. Kann man dieselbe Reihe von Sinneseindrücken zweimal auf sich wirken lassen, so findet man dieselbe Anzahl; doch ist die Gleichheit nur eine Erfahrungstatsache, deren Allgemeingültigkeit man nicht beweisen, sondern nur annehmen kann. Man drückt diesen *Grundsatz* in der Form aus: *Jede Größe ist sich selbst gleich*, d. h. zunächst: dieselbe Reihe von Sinneseindrücken liefert immer wieder dieselbe Zahl.

Sind die Sinneseindrücke nicht zeitlich geordnet, z. B. der einer Herde Schafe, so hat man es nicht mit einer Reihe, sondern mit einer Menge zu tun, und diese kann erst gezählt werden, wenn die einzelnen Eindrücke in eine zeitliche Reihe geordnet sind. Die räumliche Anordnung ist dabei nur eine Vorbereitung dazu, die sinnlichen Eindrücke nacheinander zu empfangen. Der Grundsatz: „Jede Größe ist sich selbst gleich" verlangt nun, daß auch dieselbe Menge stets dieselbe Zahl liefert, ein Satz, der unserm Denken so natürlich ist, daß wir aus der Gleichheit der Zahl grundsätzlich auf die Gleichheit der Menge schließen. Doch liegt hierin ein erheblicher Fortschritt gegenüber der Gleichheit der Zahl bei zweimaliger Zählung derselben Reihe. Denn die Menge kann auf verschiedene Weise zu einer Reihe geordnet werden. Denke man sich schwarze und weiße Schafe, so kann man entweder erst alle weißen, dann alle schwarzen durch eine Pforte gehen lassen oder abwechselnd ein schwarzes und ein weißes.

Der Grundsatz: „Jede Größe ist sich selbst gleich" erweitert sich also zu dem Satz: Die Anzahl der Sinneseindrücke ist von der Reihenfolge, in welcher sie gezählt werden, unabhängig, oder auf die reinen Zahlen ausgedehnt: *Die Zahl ist von der Reihenfolge der sie bildenden Einheiten unabhängig.*

§ 2.*

Das dekadische Positionssystem.

Während die Zahlwörter in der Mehrzahl der Kultursprachen (Französisch macht mit quatre-vingt eine Ausnahme) so gebildet sind, daß 10 Einheiten einer niederen Ordnung zu einer Einheit einer höheren Ordnung zusammengesetzt

Digitized by Google

werden, und für die Mehrheiten der höheren Ordnung dieselben Zahlwörter wie für die Mehrheiten der unteren Ordnung, nur mit einem entsprechenden Zusatz, gebraucht werden, ist in der Schrift dasselbe Prinzip erst sehr viel später durchgeführt worden. Das dekadische System der Zahlwörter findet seinen vollkommenen Ausdruck im Positionssystem der Zahlen. Der entscheidende Schritt war hierin die Erfindung der Null. Dieser ist von den Indern (vgl. Tropfke, Gesch. d. El.-Math. I. 13) etwa um 400 nach Chr. getan.

Von den Indern gelangte die Kenntnis zu den Arabern, und das Rechenbuch des Muhamed ibn Musa Alchwarizmi (IX. Jahrhundert) machte das Positionssystem dem Abendlande bekannt. Die nach Alchwarizmi Algorithmiker genannten spanischen und italienischen Mathematiker des XII. Jahrhunderts suchten das Positionssystem einzuführen, und um 1300 fand es schon in Italien in kaufmännischen Büchern Verwendung; aber erst in der Mitte des XVI. Jahrhunderts gelangte es zu allgemeiner Herrschaft.

Das Bilden der Zahlen durch wiederholtes Hinzufügen der Eins heißt Zählen. Als Zeichen für das Hinzufügen dient + (plus, dazu). Man erhält 1+1 oder die Zahl 2, 1+1+1 oder die Zahl 3. So entsteht durch Zählen die Reihe der natürlichen Zahlen. Sie bilden eine mit Eins beginnende, unbegrenzt fortlaufende Reihe.

Zur Darstellung der Zahlen dienen als Zahlzeichen die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Um die sämtlichen Zahlen durch diese zehn Ziffern auszudrücken, faßt man je zehn Einer zu einem Zehner, je zehn Zehner zu einem Hunderter, je zehn Hunderter zu einem Tausender usw. zusammen und setzt fest, daß jede der Ziffern 1 bis 9 Zehner, Hunderter, Tausender ... ausdrückt, je nachdem sie in der ersten, zweiten, dritten ... Stelle links von den Einern stehen, wobei die Stellen der fehlenden Einheiten mit Nullen ausgefüllt werden. Ein Zehner wird also durch 10, ein Hunderter durch 100, ein Tausender durch 1000 dargestellt. Jede Zahl kann dann als aus Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern usw. zusammengesetzt gedacht werden und wird kurz durch Nebeneinanderschreiben der Stellenzahlen dargestellt, wobei die Stellen fehlender Einheiten durch Nullen ausgefüllt werden.

Zum bequemen Lesen und Schreiben der Zahlen faßt man je drei Stellen von rechts aus zu einer Ordnung, je zwei Ordnungen zu einer Klasse zusammen und bezeichnet die erhaltenen Klassen mit Einer-, Millioner-, Billionerklasse.

§ 3.*

Ersatz der Zahlen durch Buchstaben und Strecken.

Die Zahlen und das Zählen bilden die Grundlage des Rechnens. Rechnen ist ein Verfahren, durch welches aus zwei (oder mehreren) gegebenen Zahlen eine neue Zahl hergestellt wird. Man unterscheidet vier verschiedene Rechnungsarten (Spezies): Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

Bildet man aus zwei Zahlen eine dritte, so heißen die beiden ersten Rechenzahlen, die dritte Ergebnis. Die Rechenzahlen unterscheidet man als (1) leidende (passive) und als (2) wirkende (aktive). (Buchrucker.)

Digitized by Google

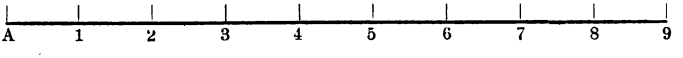
Dem Rechnen, das man auch als gemeine Arithmetik bezeichnet, steht die allgemeine Arithmetik gegenüber. Diese hat die Aufgabe, die beim Rechnen gefundenen und benutzten Gesetze der Zahlen als allgemein gültige darzustellen und zu beweisen.

Dabei bedarf sie zur Bezeichnung einer Zahl im allgemeinen noch besonderer Zeichen. Als Zeichen für unbestimmte (allgemeine) Zahlen wendet man die Buchstaben an. Ein Buchstabe (a) kann jede beliebige Zahl ausdrücken, mit der Einschränkung jedoch, daß in derselben Rechnung Gleichheit der Buchstaben Gleichheit der Zahlen, Verschiedenheit der Buchstaben Ungleichheit der Zahlen bedingt. Es bedeutet daher

$$a: 1+1+1+1+\cdots+1 \text{ (a mal)}, \quad b: 1+1+1+\cdots+1 \text{ (b mal)}.$$

Da die allgemeine Arithmetik zur Darstellung der Zahlgesetze Buchstaben benutzt, wird sie auch Buchstabenrechnung genannt. Es ist aber für das Verständnis unerläßlich, daß man sich jedes arithmetische Gesetz an bestimmten Zahlen klar macht und an bestimmten Zahlen prüft.

Die Griechen verwandten, da ihre Buchstaben Zahlen bedeuteten, zur Darstellung der allgemeinen Zahlen Strecken. Man kann aber auch die bestimmten Zahlen durch Strecken versinnlichen. Diese Darstellung ist durch Mathematiker des XIX. Jahrhunderts (Gauß, G. Cantor u. a.) außerordentlich vervollkommnet worden und hat wesentliche Dienste geleistet, den Begriff der Zahl und die verschiedenen Zahlarten schärfer zu fassen. Die natürlichen Zahlen werden hiernach durch Strecken dargestellt, die horizontal von links nach rechts gezogen sind. Nachdem eine Strecke, z. B. 1 cm, als Einheit angenommen ist, wird die doppelte Strecke mit 2, die dreifache mit 3 usw. bezeichnet. Wählt man für alle Zahlen denselben Anfangspunkt A, so bilden die Strecken eine gerade Linie. An den Endpunkt der Strecke setzt man die Zahl und nimmt vielfach diesen Endpunkt als ein neues Bild der Zahl. Doch müssen diese beiden Darstellungen in Gedanken scharf auseinander gehalten werden, obgleich sie sich in der Zeichnung nicht unterscheiden.



Nach der ersteren wird die Zahl 5 durch die Strecke von A bis 5 dargestellt, nach der zweiten durch den Punkt, bei welchem die Ziffer 5 steht.

§ 4.*

Die Gleichung.

Kann man zwei Zahlen a und b in Einheiten zerlegen und jeder Eins der Zahl a eine Eins der Zahl b zuordnen, so heißen a und b einander gleich. Man kann sie durch das Gleichheitszeichen (=) verbinden, $a = b$, und nennt eine solche Verbindung eine Gleichung. In der Regel drückt eine solche Gleichung eine Forderung aus: $x = 7$ heißt: x soll gleich 7 gemacht werden. Es können aber auch mehrere Zahlen durch eine Gleichung

Digitized by Google

verbunden werden. Dann behauptet diese entweder, daß zwei Operationen dasselbe Ergebnis liefern, z. B. $6 \cdot 4 = 4 + 20$ (wir sprechen vier und zwanzig), $a \cdot b = b \cdot a$, oder sie verlangt, daß die Zahlen so gewählt werden, daß das Ergebnis auf beiden Seiten das nämliche ist, $3 + x = 7$, was eintritt, wenn x gleich vier ist.

Eine Gleichung ist also die Verbindung zweier Zahlausdrücke durch das Gleichheitszeichen, die eben durch diese Verbindung als gleich hingestellt werden. Die beiden Zahlausdrücke bilden die Seiten der Gleichung. In

$$3 + x = 7$$

ist $3 + x$ die linke, 7 die rechte Seite der Gleichung.

Ergibt sich bei der Zuordnung der Einsen der Zahl a zu den Einsen der Zahl b, daß nicht allen Einsen von a solche von b zugeordnet werden können, so sagt man, a ist größer als b, b ist kleiner als a. Man muß also zu einer kleineren Zahl Einsen hinzufügen, um sie einer größeren gleich zu machen.

Die Ungleichheit zweier Größen wird durch einen Winkel ($>$ oder $<$) bezeichnet, dessen Öffnung der größeren von beiden zugekehrt ist. Es bedeutet also

$a > b$, daß a größer als b, $a < b$, daß a kleiner als b ist.

Jede Ungleichheit kann auch in Form einer Gleichung geschrieben werden. Ist $a > b$, so ist $a = b + m$, wo m eine bestimmte Zahl ist. Ist $a < b$, so ist $a = b - r$. Umgekehrt folgt aus $a = b + m$, daß $a > b$, und aus $a = b - r$, daß $a < b$ ist.

Ein horizontaler Strich unter zwei Gleichungen bedeutet „folglich". Erschließt man aus einer Gleichung unter Verschweigen der zweiten eine dritte, so deutet man dies durch das Zeichen $\therefore$ an, das auch „folglich" oder „also" gelesen werden kann.

§ 5.*

Grundbegriffe und Grundsätze.

1. Die Worte sind sprachliche Zeichen für Vorstellungen. Eine nach Inhalt und Umfang genau bestimmte Vorstellung heißt Begriff. Die einer Wissenschaft eigentümlichen Worte, die technischen Ausdrücke, sollen nun Zeichen für Begriffe sein. Die Wissenschaft legt deshalb zunächst den Worten der Umgangssprache einen ganz bestimmten Sinn bei, der bisweilen von dem abweicht, was man gemeinhin unter dem Worte versteht, z. B. ist eine Schote im botanischen Sinne etwas anderes als die mit diesem Namen gewöhnlich belegte Hülsenfrucht der Erbse. Die Wissenschaft muß ferner, um für alle ihre Begriffe Namen zu haben, neue Worte bilden. Nimmt sie die Bestandteile aus der Landessprache, so ist das Wort dem Anfänger leichter verständlich, aber auch leichter Mißdeutungen im Sinne der Gemeinvorstellungen ausgesetzt. Deshalb werden häufig Begriffe durch ein Fremdwort ausgedrückt. Die technischen Ausdrücke der Mathematik stammen zum großen Teil aus dem Griechischen, Lateinischen und Arabischen und haben den Vorzug, Gemeingut aller Kultursprachen zu sein.

Digitized by Google

Will man einen Begriff, einen technischen Ausdruck, erklären, so braucht man dazu Worte, welche ihrerseits wieder Begriffe darstellen. Man wird also nicht umhin können, eine Reihe von Begriffen unerklärt zu lassen, und diese bezeichnet man als **Grundbegriffe**. Bis zu einem gewissen Grade ist es willkürlich, welche Begriffe man als grundlegend und welche als abgeleitet auffassen will. Da die Erklärung um so schwieriger wird, je einfacher der Begriff ist, muß die Schulmathematik eine größere Zahl von Grundbegriffen anwenden als ein ausgebildetes System der Wissenschaft. Größe, Zahl, Einheit, Gleichheit sind derartige, ohne daß diese Aufzählung vollständig wäre.

2. Die Eigenschaften der Begriffe werden durch Sätze ausgedrückt. Diese bezeichnet man als **Grundsätze** oder **Lehrsätze**. Lehrsätze müssen bewiesen, d. h. als notwendige Folge von Grundsätzen dargestellt werden. Grundsätze enthalten Annahmen auf Grund von Wahrnehmungen und Vorstellungen. Es gehört auch hier wieder zu den schwierigsten Untersuchungen, ob ein Satz sich auf andere zurückführen läßt, demnach nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz aufzufassen ist, zumal da oft in der Erklärung eines Begriffs schon ein Grundsatz ausdrücklich oder stillschweigend enthalten ist. Wird ein Satz als Grundsatz bezeichnet, so heißt dies, seine Richtigkeit ist an der Hand der Erfahrung zu prüfen. Die Zahl der mathematischen, auch der rein arithmetischen Grundsätze ist nicht so klein, wie man bisweilen angenommen hat. **Euklid** (300 v. Chr.) zählte deren zehn auf. Einige derselben hat man als Folgerungen der übrigen dargestellt, dafür aber wieder andere als notwendig erkannt, die Euklid nicht anführt.

3. Bei den in diesem Lehrbuch ausgeführten Beweisen sind folgende vier Grundsätze benutzt:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Für jede Größe darf man eine ihr gleiche setzen (substituieren).
3) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander gleich.
4) Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.

Die Fassung der Sätze ist die althergebrachte, die allerdings nicht einwandfrei ist. Der erste Satz wird gewöhnlich durch die Gleichung $a = a$ bezeichnet, seine Bedeutung für die Zahlenlehre ist in § 1 erläutert. Der zweite Satz gilt streng genommen nur in der Form: In einer Gleichung kann eine Zahl durch eine ihr gleiche ersetzt werden. Da $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ist, kann ich in der Gleichung $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = x$ für $\frac{1}{3}$ das ihm gleiche $\frac{2}{6}$ einsetzen und erhalte $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = x$. Aus dem zweiten Grundsatz kann man den dritten folgern (oder umgekehrt). Er sagt aus: Ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, so ist auch $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, oder in Buchstaben: Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$. Der vierte Grundsatz erscheint überflüssig — nicht bloß „selbstverständlich", wie die ersten drei —, da $a = b$ und $b = a$ scheinbar dasselbe aussagen; nimmt man aber die Gleichungen $3 \cdot 4 = 12$ und $12 = 3 \cdot 4$, so zeigt die erste 12 als das Ergebnis der Multiplikation von 3 und 4, die zweite die Zerlegung von 12 in die Faktoren 3 und 4.

Digitized by Google

Zusatz: Wenn $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = e$ ist, so ist $a = e$, wie sich durch wiederholte Anwendung der Grundsätze 2, 3, 4 ergibt.

4. Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, auch folgende Sätze als Grundsätze aufzufassen, obwohl sie im folgenden „bewiesen" sind, weil dort die Definitionen der Begriffe zur Hilfe herangezogen werden konnten.

5. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile.

6. Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

7. Aus zwei Gleichungen folgt eine richtige dritte, wenn man je die linken und die rechten Seiten durch dasselbe eindeutige Verfahren verbindet.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist

I. $a + c = b + d$; II. $a - c = b - d$; III. $a \cdot c = b \cdot d$;
IV. $a : c = b : d$.

Folgerung 1. Aus einer Gleichung kann man eine richtige neue gewinnen, wenn man auf beiden Seiten dasselbe eindeutige Verfahren anwendet.

Aus $a = b$ folgt, da immer $c = c$ ist:

I. $a + c = b + c$; II. $a - c = b - c$; III. $a \cdot c = b \cdot c$;
IV. $a : c = b : c$.

Folgerung 2. Das Verfahren kann wiederholt werden, auch unter mehrmaliger Benutzung derselben Gleichung. Insbesondere folgt aus $a = b$

$$a \cdot a = b \cdot b; \qquad a \cdot a \cdot a = b \cdot b \cdot b.$$

Anmerkung. Satz 6 gilt nur für absolute Zahlen. Satz 7 und Folgerung 1 und 2 unterliegen Beschränkungen, sobald eine der vorkommenden Zahlen eine Null ist. Eindeutig heißt ein Verfahren, wenn es nur ein Ergebnis erzeugen kann. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, wiederholte Multiplikation mit derselben Zahl (Potenzierung) sind eindeutige Verfahren (Operationen).

Die Umkehrung des in Folgerung 2 beschriebenen Verfahrens ist nicht eindeutig, d. h. aus $a \cdot a = b \cdot b$ folgt nicht notwendig $a = b$.

Satz 7 bzw. Folgerung 1 und 2 hat Euklid in folgender Form ausgesprochen: I. Wenn man zu Gleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Ganzen gleich. II. Wenn man von Gleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich. III. Die Doppelten von einem Dritten sind einander gleich. IV. Die Hälften von einem Dritten sind einander gleich. Ferner finden sich bei Euklid außer Grundsatz 6 folgende Grundsätze der Ungleichheit:

8. Wenn man zu Ungleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Ganzen ungleich.

9. Wenn man von Ungleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich.

Digitized by Google

Will man einen Begriff, einen technischen Ausdruck, erklären, so braucht man dazu Worte, welche ihrerseits wieder Begriffe darstellen. Man wird also nicht umhin können, eine Reihe von Begriffen unerklärt zu lassen, und diese bezeichnet man als Grundbegriffe. Bis zu einem gewissen Grade ist es willkürlich, welche Begriffe man als grundlegend und welche als abgeleitet auffassen will. Da die Erklärung um so schwieriger wird, je einfacher der Begriff ist, muß die Schulmathematik eine größere Zahl von Grundbegriffen anwenden als ein ausgebildetes System der Wissenschaft. Größe, Zahl, Einheit, Gleichheit sind derartige, ohne daß diese Aufzählung vollständig wäre.

2. Die Eigenschaften der Begriffe werden durch Sätze ausgedrückt. Diese bezeichnet man als Grundsätze oder Lehrsätze. Lehrsätze müssen bewiesen, d. h. als notwendige Folge von Grundsätzen dargestellt werden. Grundsätze enthalten Annahmen auf Grund von Wahrnehmungen und Vorstellungen. Es gehört auch hier wieder zu den schwierigsten Untersuchungen, ob ein Satz sich auf andere zurückführen läßt, demnach nicht als Grundsatz, sondern als Lehrsatz aufzufassen ist, zumal da oft in der Erklärung eines Begriffs schon ein Grundsatz ausdrücklich oder stillschweigend enthalten ist. Wird ein Satz als Grundsatz bezeichnet, so heißt dies, seine Richtigkeit ist an der Hand der Erfahrung zu prüfen. Die Zahl der mathematischen, auch der rein arithmetischen Grundsätze ist nicht so klein, wie man bisweilen angenommen hat. Euklid (300 v. Chr.) zählte deren zehn auf. Einige derselben hat man als Folgerungen der übrigen dargestellt, dafür aber wieder andere als notwendig erkannt, die Euklid nicht anführt.

3. Bei den in diesem Lehrbuch ausgeführten Beweisen sind folgende vier Grundsätze benutzt:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Für jede Größe darf man eine ihr gleiche setzen (substituieren).
3) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander gleich.
4) Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden.

Die Fassung der Sätze ist die althergebrachte, die allerdings nicht einwandfrei ist. Der erste Satz wird gewöhnlich durch die Gleichung $a = a$ bezeichnet, seine Bedeutung für die Zahlenlehre ist in § 1 erläutert. Der zweite Satz gilt streng genommen nur in der Form: In einer Gleichung kann eine Zahl durch eine ihr gleiche ersetzt werden. Da $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ist, kann ich in der Gleichung $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = x$ für $\frac{1}{3}$ das ihm gleiche $\frac{2}{6}$ einsetzen und erhalte $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = x$. Aus dem zweiten Grundsatz kann man den dritten folgern (oder umgekehrt). Er sagt aus: Ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, so ist auch $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, oder in Buchstaben: Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$. Der vierte Grundsatz erscheint überflüssig — nicht bloß „selbstverständlich", wie die ersten drei —, da $a = b$ und $b = a$ scheinbar dasselbe aussagen; nimmt man aber die Gleichungen $3 \cdot 4 = 12$ und $12 = 3 \cdot 4$, so zeigt die erste 12 als das Ergebnis der Multiplikation von 3 und 4, die zweite die Zerlegung von 12 in die Faktoren 3 und 4.

Digitized by Google

Zusatz: Wenn $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = e$ ist, so ist $a = e$, wie sich durch wiederholte Anwendung der Grundsätze 2, 3, 4 ergibt.

4. Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, auch folgende Sätze als Grundsätze aufzufassen, obwohl sie im folgenden „bewiesen" sind, weil dort die Definitionen der Begriffe zur Hilfe herangezogen werden konnten.

5. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile.

6. Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

7. Aus zwei Gleichungen folgt eine richtige dritte, wenn man je die linken und die rechten Seiten durch dasselbe eindeutige Verfahren verbindet.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist

I. $a + c = b + d$; II. $a - c = b - d$; III. $a \cdot c = b \cdot d$;
IV. $a : c = b : d$.

Folgerung 1. Aus einer Gleichung kann man eine richtige neue gewinnen, wenn man auf beiden Seiten dasselbe eindeutige Verfahren anwendet.

Aus $a = b$ folgt, da immer $c = c$ ist:

I. $a + c = b + c$; II. $a - c = b - c$; III. $a \cdot c = b \cdot c$;
IV. $a : c = b : c$.

Folgerung 2. Das Verfahren kann wiederholt werden, auch unter mehrmaliger Benutzung derselben Gleichung. Insbesondere folgt aus $a = b$

$$a \cdot a = b \cdot b; \qquad a \cdot a \cdot a = b \cdot b \cdot b.$$

Anmerkung. Satz 6 gilt nur für absolute Zahlen. Satz 7 und Folgerung 1 und 2 unterliegen Beschränkungen, sobald eine der vorkommenden Zahlen eine Null ist. Eindeutig heißt ein Verfahren, wenn es nur ein Ergebnis erzeugen kann. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, wiederholte Multiplikation mit derselben Zahl (Potenzierung) sind eindeutige Verfahren (Operationen).

Die Umkehrung des in Folgerung 2 beschriebenen Verfahrens ist nicht eindeutig, d. h. aus $a \cdot a = b \cdot b$ folgt nicht notwendig $a = b$.

Satz 7 bzw. Folgerung 1 und 2 hat Euklid in folgender Form ausgesprochen: I. Wenn man zu Gleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Ganzen gleich. II. Wenn man von Gleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich. III. Die Doppelten von einem Dritten sind einander gleich. IV. Die Hälften von einem Dritten sind einander gleich. Ferner finden sich bei Euklid außer Grundsatz 6 folgende Grundsätze der Ungleichheit:

8. Wenn man zu Ungleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Ganzen ungleich.

9. Wenn man von Ungleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Die vier ersten Rechnungsarten (Spezies) in absoluten Zahlen.

1. Kapitel. Von der Addition und Subtraktion.

(Rechnungsarten der ersten Stufe.)

A. Von der Addition.

§ 6.

Erklärung. Zu einer Zahl eine andere addieren heißt die Zahl finden, welche sämtliche in beiden Zahlen enthaltenen Einsen enthält. Die beiden zu addierenden Zahlen heißen Summanden (die erste Augendus, die zweite Addendus), das Ergebnis der Addition wird die Summe genannt.

Soll zur Zahl a die Zahl b addiert werden, so setzt man zwischen sie das Zeichen (+) und liest a plus b oder a dazu b. Es bezeichnet also $a + b$ die arithmetische Form der Aufgabe, und, wenn c das Ergebnis der Addition ist, so besteht nach Einleitung § 4 die Gleichung $a + b = c$.

Aus der Erklärung ergibt sich, daß die Summe c erhalten wird, indem man in der Zahlenreihe von a aus so viele Einheiten weiter zählt, als b anzeigt.

Die Größe $a + b$, welche man nach § 5, Gr. 2 für c setzen kann, drückt nicht nur die Forderung der Addition, die Form der Summe (formelle Summe), sondern auch das Ergebnis der Addition, den Wert der Summe, aus und wird, wenn sie als das Ergebnis einer vorhergegangenen Rechnung gedacht und als Zeichen einer Zahl hervorgehoben werden soll, mit einer Klammer umschlossen.

Zusatz 1. Auch mehrere Zahlen kann man addieren, indem man zur 1ten die 2te, zu ihrer Summe die 3te usw. addiert. Die Summe von a, b, c ist demnach $(a + b) + c$ oder $a + b + c$, und nach § 3 ist

$$a+b+c=1+1+1\cdots(a\,\text{mal})+1+1+1\cdots(b\,\text{mal})+1+1+1\cdots(c\,\text{mal}).$$

Anmerkung. Sind die Summanden einander gleich, so schreibt man in abgekürzter Form

$2a$ statt $a + a$, $3a$ statt $a + a + a$, $5a$ statt $a + a + a + a + a$

(vergleiche § 13), und man erkennt durch Zerlegung in Einheiten, daß

$$2a + 5a = 7a, \quad 5a + 8a + 10a = 23a \text{ ist.}$$

Erklärung. Eine Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch Rechnungszeichen heißt ein (arithmetischer) Ausdruck (eine Form); er ist einfach, wie $a + b$, wenn er aus einfachen Zahlen besteht, zusammengesetzt, wenn wenigstens die eine der ihn bildenden Zahlen selbst wieder ein Ausdruck ist,

Digitized by Google

also durch eine vorhergehende Rechnung erst erhalten werden soll. In betreff der in ihm auszuführenden Rechnung gelten folgende Regeln (Erste Klammerregel):

Werden zu einer Zahl (a) nacheinander andere Zahlen (b, c, d) addiert, so wird nach dem obigen jede folgende zur Summe der vorangehenden addiert; die Reihenfolge der vorzunehmenden Operationen ist also die von links nach rechts. Soll eine andere Reihenfolge eintreten, so wird sie durch Klammern angedeutet.

Die Ausrechnung des eingeklammerten Ausdrucks geht vor, z. B. $3+(4+7) = 3+11$. Aber auch der Ausdruck, mit welchem eine Rechnung vorgenommen werden soll, wird, wenn er als ein Ganzes hervorgehoben werden soll, in Klammern eingeschlossen $(a+b)+(c+d)$.

Zusatz 2. Sind benannte Zahlen zu addieren, so müssen sie gleichnamig sein; die Summe hat die Benennung der Summanden.

Sind die Zahlen gleichartig (2 m, 5 cm), so können sie stets auf dieselbe Benennung gebracht und also addiert werden.

§ 7.

Lehrsatz 1. Vertauschungsgesetz der Addition. Der Wert der Summe zweier oder mehrerer Zahlen ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.

Behauptung 1. $a+b=b+a.$ (1)

Beweis. Es ist nach § 3:

$a+b = 1+1+1+\cdots$ (a mal) $+1+1+1+\cdots$ (b mal),
$b+a = 1+1+1+\cdots$ (b mal) $+1+1+1+\cdots$ (a mal).

Da also beide Seiten der Gleichung (1) dieselbe Anzahl von Einsen enthalten, so müssen sie nach § 4 gleich sein.

2. Ebenso folgt: $a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a.$ (1*)

Lehrsatz 2. Verbindungsgesetz der Addition. Wird zu einer Zahl eine Summe addiert, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man einen beliebigen Summanden zu der Zahl addiert und zu der so erhaltenen Summe den anderen Summanden addiert, z. B.

$$7+(3+4)=(7+3)+4=(7+4)+3.$$

Behauptung. $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b.$ (2*)

Beweis. $a+(b+c)=(b+c)+a$ [Lf. 1] $=b+c+a$ [§ 6]
$=a+b+c$ [Lf. 1] $=(a+b)+c$ [§ 6].

Digitized by Google

Zusatz. Ist eine Summe mehrerer Summanden zu einer Zahl zu addieren, so kann man entsprechend beweisen

$$m + (a + b + c) = (m + a) + b + c = (m + b) + c + a = \text{usw.}$$

Dies drückt auch die Gleichung

$$m + (a + b + c) = m + a + b + c \qquad (2)$$

aus, wenn man ausdrücklich auf die Verwendbarkeit des Vertauschungsgesetzes hinweist.

§ 8.

Lehrsatz 1. Addiert man zu jeder von zwei gleichen Zahlen je eine von zwei anderen gleichen Zahlen, so ist die erste Summe gleich der zweiten Summe (gewöhnlich abgekürzt: Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches), z. B.

aus $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ folgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, aber auch $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{3}$.

Voraussetzung. $a = b,\ c = d.$

Behauptung. $a + c = b + d.$

Beweis. $a + c = a + c$ nach § 5, Gr. 1.

Setzt man rechts b statt a, d statt c, so folgt nach § 5, Gr. 2:

$$a + c = b + d.$$

Lehrsatz 2. Addiert man zu jeder von zwei ungleichen Zahlen dieselbe Zahl, so sind auch die Summen ungleich, und zwar ist die größere Summe die, welche mit dem größeren Summanden gebildet ist (abgekürzte Form: Gleiches zu Größerem addiert gibt Größeres), z. B.

$$\text{da } \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3} \text{ ist } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} > \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}.$$

Voraussetzung. $a > b.$

Behauptung. $a + c > b + c.$

Beweis. Nach § 4 ist $a = b + m,$

$$\underline{c = c,}$$

$$a + c = b + m + c = b + c + m,$$

$$\therefore a + c > b + c.$$

Lehrsatz 3. Addiert man zu einer Zahl, die größer als eine zweite ist, eine dritte, die wiederum größer als eine vierte ist, so ist die Summe aus der ersten und dritten Zahl größer als die Summe aus der zweiten und vierten Zahl (Größeres zu Größerem addiert gibt Größeres), z. B.

$$\text{da } \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3} \text{ und } \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{6} \text{ ist } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}.$$

Voraussetzung. $a > b,\ c > d.$

Behauptung. $a + c > b + d.$

Beweis. Nach § 4 ist $a = b + m$

$$\underline{\text{und } c = d + n,}$$

$$a + c = b + d + m + n,$$

$$\therefore a + c > b + d.$$

Digitized by Google

B. Von der Subtraktion.

§ 9.

Erklärung. Von einer Zahl eine andere subtrahieren heißt: die Zahl finden, welche zu der letzteren (der kleineren) addiert die erstere (die größere) gibt. Die Zahl, von welcher subtrahiert wird, heißt der Minuendus, die Zahl, welche subtrahiert wird, der Subtrahendus, das Ergebnis der Subtraktion die Differenz. Diese ist also definiert durch die Gleichung

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahendus} = \text{Minuendus}.$$

Soll von der Zahl a die Zahl b subtrahiert werden, so setzt man zwischen sie das Zeichen (—) und liest a minus b oder a davon b. Es bezeichnet also $a - b$ die arithmetische Form der Aufgabe, und wenn c das Ergebnis der Subtraktion ist, besteht die Gleichung

$$a - b = c.$$

Wenn daher $a - b = c$ ist, so folgt $b + c = a$.
Umgekehrt, wenn $b + c = a$ ist, so folgt $c = a - b$, $b = a - c$.

Die Differenz zweier Zahlen a und b wird demnach erhalten, indem man die Anzahl der Einheiten sucht, welche man von b aus vorwärts zählen muß, um a zu erhalten, oder indem man in der Zahlenreihe von a aus b Einheiten zurückzählt.

Die Größe $a - b$, welche man für c setzen darf, drückt nicht nur die Forderung der Subtraktion, die Form der Differenz (formelle Differenz) aus, sondern auch das Ergebnis der Subtraktion, den Wert der Differenz.

Zusatz. Ist eine benannte Zahl von einer andern benannten Zahl zu subtrahieren, so müssen beide Zahlen gleichnamig sein, und ihre Differenz hat dieselbe Benennung.

Folgerung 1. Aus der Erklärung der Differenz folgt:

$$(a - b) + b = a. \qquad (3)$$

Wenn man zur Differenz zweier Zahlen den Subtrahendus addiert, erhält man den Minuendus.

Hieraus ergibt sich die Probe auf die Subtraktion. Daß

$$a - b = x, \quad 12 - 4 = 8$$

ist, erkennt man daran, daß

$$b + x = a, \quad 4 + 8 = 12 \text{ ist.}$$

Folgerung 2. Wenn man von der Summe zweier Zahlen die eine subtrahiert, so erhält man die andere, es ist

$$(a + b) - b = a, \qquad (4)$$

denn a ist die Zahl, welche, zu b addiert, $b + a$ oder $a + b$ gibt.

Anmerkung. Da eine Zahl a dem Werte nach unverändert bleibt, wenn man sie um die Zahl b nacheinander vermehrt und vermindert, so sind Addition und Subtraktion entgegengesetzte Rechnungsarten.

Digitized by Google

§ 10.

Lehrsatz 1. Subtrahiert man von jeder von zwei gleichen Zahlen je eine von zwei andern gleichen Zahlen, so ist die erste Differenz gleich der zweiten Differenz (abgekürzt: Gleiches von Gleichem subtrahiert läßt Gleiches), z. B.

aus $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ folgt $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$.

Voraussetzung. $a = b$, $c = d$.

Behauptung. $a - c = b - d$.

Beweis. $a - c = a - c$ nach § 5, Gr. 1.
Setzt man rechts b statt a, d statt c, so folgt nach § 5, Gr. 2

$$a - c = b - d.$$

Lehrsatz 2. Subtrahiert man von zwei ungleichen Zahlen dieselbe Zahl, so sind die Differenzen ungleich, und zwar ist die Differenz die größere, welche den größeren Minuendus enthält (abgekürzt in: Gleiches von Größerem subtrahiert läßt Größeres).

Da $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} > \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$.

Voraussetzung. $a > b$.

Behauptung. $a - c > b - c$.

Beweis. Nach § 4 setzt man $a = b + m$,
nach § 5, Gr. 1 $c = c$,

$$a - c = b - c + m \text{ (Lf. 1)},$$
$$\therefore a - c > b - c.$$

Lehrsatz 3. Subtrahiert man je eine von zwei ungleichen Zahlen von zwei gleichen Zahlen, so erhält man ungleiche Differenzen, und zwar die größere Differenz da, wo der kleinere Subtrahendus ist (abgekürzt: Kleineres von Gleichem läßt Größeres), z. B.

von $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$.

Voraussetzung. $a > b$.

Behauptung. $c - a < c - b$.

Beweis (indirekt). Erste Annahme.

Wäre $c - a = c - b$, so wäre, da nach Voraussetzung
$a > b$, nach § 8, 2
$c - a + a > c - b + b$ und also nach § 9, Folg. 1
$c > c$, was § 5, Gr. 1 widerspricht.

Zweite Annahme. (3)

Wäre $c - a > c - b$, so wäre, da nach Voraussetzung
$a > b$, nach § 8, 3
$c - a + a > c - b + b$, und also nach § 9, Folg. 1
$c > c$, was § 5, Gr. 1 widerspricht.

Digitized by Google

Da nun $c - a$ nicht gleich $c - b$ und nicht größer als $c - b$ ist, muß es kleiner als $c - b$ sein.

Lehrsatz 4. Ist von vier Zahlen die erste größer als die zweite, und die dritte kleiner als die vierte, so ist die Differenz aus der ersten und dritten Zahl größer als die Differenz aus der zweiten und vierten Zahl (Kleineres von Größerem subtrahiert gibt Größeres).

Beispiel. Da $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

Voraussetzung. $a > b$, $c < d$.

Behauptung. $a - c > b - d$.

Beweis (indirekt). Angenommen, es wäre

$$a - c = b - d,$$

so wäre, da nach Voraussetzung $c < d$ ist, nach § 8, 2

$$a - c + c < b - d + d,$$

also nach § 9, Folg. 1

$$a < b,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre zweitens

$$a - c < b - d,$$

so wäre, da nach Voraussetzung $c < d$ ist, nach § 8, 3

$$a - c + c < b - d + d,$$

also nach § 9, Folg. 1

$$a < b,$$

was wieder der Voraussetzung widerspricht.

Da $a - c$ nicht gleich $b - d$ oder kleiner als $b - d$ ist, muß es größer als $b - d$ sein.

§ 11.

Erklärung. Ein Ausdruck, dessen Zahlen durch Addition oder durch Subtraktion oder durch beides miteinander verbunden sind, heißt mehrgliedrig oder ein Polynom oder Aggregat; die vor den Zahlen stehenden Zeichen (+) oder (—) werden ihre Vorzeichen, die einzelnen Zahlen mit ihren Vorzeichen die Glieder des Polynoms genannt. Besteht das Polynom aus zwei Gliedern, so heißt es Binom, besteht es aus drei Gliedern, Trinom. Die Reihenfolge, in welcher die Zahlen eines Polynoms addiert oder subtrahiert werden sollen, ist die von links nach rechts; jede andere Reihenfolge wird durch Klammern angedeutet; die eingeklammerte Rechnung geht vor.

Lehrsatz 1. Wird eine Zahl mit zwei anderen Zahlen durch Addition und Subtraktion verbunden, so ist das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Operationen.

Behauptung. $$a + b - c = a - c + b. \qquad (5)$$

Beweis (durch die Probe). Addiert man den Subtrahendus c der linken Seite zur rechten Seite, so erhält man nach (1*) und (3):

$$a - c + b + c = (a - c) + c + b = a + b,$$

d. i. der Minuendus der linken Seite.

Umkehrung. $$a - c + b = a + b - c. \qquad (5^*)$$

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Werden von einer Zahl zwei Zahlen nacheinander subtrahiert, so ist das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Zahlen subtrahiert werden.

Behauptung. $a - b - c = a - c - b.$ (6)

Beweis. Addiert man den Subtrahendus c der linken Seite zur rechten Seite, so erhält man nach (5*) und (3*):

$$a - c - b + c = (a - c) + c - b = a - b,$$

d. i. der Minuendus der linken Seite.

Folgerung. Der Wert eines Polynoms ist unabhängig von der Reihenfolge der auf die erste Zahl folgenden Glieder; denn durch wiederholte Anwendung der Formeln (1*), (5), (5*) und (6) kann man jedes Glied in jede vorgeschriebene Stelle bringen.

Beispiel. $a - b + c - d - e + f = (a + c - b - d) - e + f = (a + c - b) - d + f - e = (a + c) - b + f - d - e = a + c + f - b - d - e$ usw.

§ 12.

Lehrsatz 1. Subtrahiert man von einer Zahl eine Summe, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Summanden nacheinander subtrahiert.

Behauptung. $a - (b + c) = a - b - c.$ (7)

Beweis. Subtrahiert man von a nur b Einheiten, so erhält man a — b; man hat aber, da b und c Einheiten subtrahiert werden sollen, noch c Einheiten zu wenig subtrahiert; diese muß man daher noch abziehen und erhält a — b — c.

Umkehrung. $a - b - c = a - (b + c).$ (7*)

Subtrahiert man von einer Zahl nacheinander zwei Zahlen, so erhält man denselben Wert, wie wenn man von ihr die Summe der Zahlen subtrahiert.

Lehrsatz 2. Addiert man zu einer Zahl eine Differenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man nacheinander den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert.

Behauptung. $a + (b - c) = a + b - c.$ (8)

Beweis. Addiert man zu a den Minuendus b, so erhält man a + b; man hat dann aber, da nur (b — c) Einheiten addiert werden sollen, c Einheiten zu viel addiert; diese c Einheiten muß man daher noch abziehen und erhält a + b — c.

Umkehrung. $a + b - c = a + (b - c).$ (8*)

Subtrahiert man eine Zahl von einer Summe, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man die Zahl von einem der Summanden subtrahiert und die Differenz zum andern Summanden addiert.

Digitized by Google

Lehrsatz 3. Subtrahiert man von einer Zahl eine Differenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man nacheinander den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert.

Behauptung. $a - (b - c) = a - b + c.$ (9)

Beweis. Subtrahiert man von a den Minuendus b, so erhält man a — b; man hat dann aber, da (b — c) Einheiten subtrahiert werden sollen, c Einheiten zu viel subtrahiert; diese c Einheiten muß man also noch addieren und erhält a — b + c.

Umkehrung. $a - b + c = a - (b - c).$ (9*)

Addiert man zu einer Differenz eine Zahl, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man die Zahl vom Subtrahendus abzieht und die erhaltene Differenz vom Minuendus abzieht.

Lehrsatz 4. Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man Minuend und Subtrahend um dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert, wenn diese Zahl kleiner als der Subtrahendus ist, z. B.

$$12 - 7 = 14 - 9 = 10 - 5.$$

Behauptung. $a - b = (a + m) - (b + m) = (a - m) - (b - m).$ (9**)

Beweis. 1. $(a + m) - (b + m) = (a + m) - b - m$ (7)
$= (a + m) - m - b$ (6) $= a - b$ (4).

2. $(a - m) - (b - m) = (a - m) - b + m$ (9)
$= (a - m) + m - b$ (5*) $= a - b$ (3).

Anmerkung. Die Formeln (7), (8), (9) lassen sich auch durch die Probe auf die Subtraktion beweisen.

Folgerung. Aus den Formeln (2), (7), (7*), (8), (8*), (9), (9*) ergibt sich die Zweite Klammerregel:

In einem mehrgliedrigen Ausdrucke darf man nach einem Pluszeichen eine Klammer bilden oder fortlassen.

In einem mehrgliedrigen Ausdrucke darf man nach einem Minuszeichen eine Klammer bilden oder weglassen, wenn man die Zeichen (+) oder (—) in der Klammer in die entgegengesetzten (—) beziehungsweise (+) verwandelt.

Die Regeln gelten nicht nur von einem Trinom, sondern auch dann, wenn in der Klammer ein Polynom steht oder nach einem Plus- oder Minuszeichen ein mehrgliedriger Ausdruck in Klammer gesetzt werden soll, wie man durch wiederholte Anwendung der oben genannten Formeln in jedem Falle leicht zeigen kann, z. B.

$a + (b + c - d) = a + [b + (c - d)] = a + b + (c - d) = a + b + c - d,$
$a - (b + c - d) = a - [b + (c - d)] = a - b - (c - d) = a - b - c + d.$

Digitized by Google

Sind in eine Klammer eine oder mehrere Klammern eingeschlossen, so löst man sie auf, indem man entweder von der innersten zur äußersten, oder indem man von der äußersten zur innersten fortschreitet. Es ist z. B.

$3+(30-\{18-[6-(4-3)]+7\}+8)=3+(30-\{18-[6-1]+7\}+8)$
$=3+(30-\{18-5+7\}+8)=3+(30-20+8)=3+18=21.$

$a+(b-\{c-[d-(e-f)]+g\}+h)=a+b-\{c-[d-(e-f)]+g\}+h$
$=a+b-c+[d-(e-f)]-g+h=a+b-c+d-(e-f)-g+h$
$=a+b-c+d-e+f-g+h.$

---

2. Kapitel. Von der Multiplikation und Division.

(Rechnungsarten der zweiten Stufe.)

A. Von der Multiplikation.

§ 13.

Erklärung. Wenn in einer formellen Summe die Summanden einander gleich sind, so verbindet man einen der Summanden mit der Anzahl derselben durch ein liegendes Kreuz ($\times$) oder durch einen Punkt ($\cdot$), setzt also

$$4+4+4=4\times 3,\quad a+a+a+\cdots+a\,(b\text{mal})=a\cdot b \qquad (10)$$

und liest die erhaltene Form 4 mit 3 (ergänze: multipliziert) oder 4 dreimal (weniger genau 4 mal 3), ebenso a mit b oder a bmal. Diese Art, aus zwei Zahlen a und b eine neue Zahl zu bilden, heißt Multiplikation.

Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplizieren heißt: die Summe von b Summanden bilden, deren jeder gleich a ist.

Die Zahl a, welche den Wert jedes Summanden angibt, heißt Multiplikandus, die Zahl b, welche die Anzahl der Summanden angibt, Multiplikator; das Ergebnis der Multiplikation wird Produkt genannt. Ein Produkt ist demnach eine Summe gleicher Summanden.

$a\cdot b$ bezeichnet die arithmetische Form der Aufgabe, und wenn c das Produkt ist, so besteht die Gleichung

$$a\cdot b=c.$$

Die Größe $a\cdot b$, welche man für c setzen darf, drückt nicht nur die Forderung der Multiplikation (formelles Produkt), sondern auch ihr Ergebnis, den Wert des Produktes aus.

Das Multiplikationszeichen darf beim Schreiben vor einem Buchstaben und vor einer Klammer fortgelassen werden, im ersteren Fall auch beim Sprechen. Statt $3\cdot a$ schreibt man 3a und spricht drei a, statt $a\cdot b$ schreibt man ab und spricht abe, statt $3\cdot(5+7)$ kann man $3(5+7)$ schreiben, spricht aber drei (multipliziert) mit der Summe: fünf plus sieben (weniger genau: 3 mal, Klammer auf, fünf plus sieben, Klammer zu). Um das Multiplikationszeichen fortlassen zu können, setzt man $a+a+a=3a$, nicht, wie richtiger wäre, $a\cdot 3$ (vgl. § 14, Zus.).

Digitized by Google

Folgerung. Der Multiplikandus Eins kann beliebig weggelassen und hinzugefügt werden. Statt $1+1+1$ ist formell $1\cdot 3$ zu setzen, das Ergebnis ist aber 3. Statt der Zahl 3 darf man deshalb auch das Produkt $1\cdot 3$ schreiben. Statt $1+1+1+\cdots+1$ (amal) schreibt man zunächst $1\cdot a$, sodann $1a$ oder nach § 3 kurz a. Man darf aber auch umgekehrt für a, wo es zweckmäßig erscheint, $1a$ setzen.

Zusatz 1. Auch mehrere Zahlen kann man miteinander multiplizieren, indem man die 1te mit der 2ten, ihr Produkt mit der 3ten usw. multipliziert. Die zu multiplizierenden Zahlen führen den gemeinschaftlichen Namen Faktoren.

Zusatz 2. Der Multiplikator muß eine unbenannte Zahl sein. Ist der Multiplikand benannt, so hat das Produkt dieselbe Benennung.

Lehrsatz 1. Multipliziert man jede von zwei gleichen Zahlen mit derselben dritten Zahl, so erhält man gleiche Produkte, z. B.

da $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, ist $\frac{1}{3}\cdot 12=\frac{2}{6}\cdot 12$.

Voraussetzung. $a=b$.

Behauptung. $ac=bc$.

Beweis. Aus $a=b$ und nochmals $a=b$ folgt nach § 8, 1 $a+a=b+b$, fügt man wieder $a=b$ hinzu, so erhält man $a+a+a=b+b+b$. Dies kann man cmal fortsetzen und erhält

$a+a+a+\cdots+a$ (cmal) $=b+b+b=\cdots+b$ (cmal), d. i. $a\cdot c=b\cdot c$.

Lehrsatz 2. Multipliziert man jede von zwei gleichen Zahlen mit je einer von zwei gleichen Zahlen, so erhält man gleiche Produkte (abgekürzt: Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches), z. B.

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, folglich $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}$.

Voraussetzung. $a=b$, $c=d$.

Behauptung. $ac=bd$.

Beweis. Nach Lehrsatz 1 ist $ac=bc$. Nach § 5, Gr. 2 darf ich für c das ihm gleiche d in das zweite Produkt einsetzen und erhalte $ac=bd$.

§ 14.

Lehrsatz 1. Wird eine unbenannte Zahl mit einer zweiten Zahl multipliziert, so erhält man dasselbe Produkt, wie wenn man die zweite Zahl mit der ersten multipliziert, oder das Produkt bleibt ungeändert, wenn man Multiplikandus und Multiplikator miteinander vertauscht, vorausgesetzt, daß beide unbenannt sind. (Vertauschungsgesetz der Multiplikation.)

Behauptung. $3\cdot 4=4\cdot 3$.

Beweis. Es ist $3\cdot 4=3+3+3+3$, und wenn man die Dreien in Einsen zerlegt, ist

$3\cdot 4=(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)$,
$4\cdot 3=4+4+4=(1+1+1+1)+(1+1+1+1)+(1+1+1+1)$.

Digitized by Google

Nach dem Verbindungsgesetz der Addition kann man die Klammern fortlassen und erhält

$$3 \cdot 4 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1,$$
$$4 \cdot 3 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Da die rechten Seiten der Gleichung gleich sind, müssen nach § 5, Gr. 3 auch die linken Seiten gleich sein, also $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

Dieser Beweis ist mit bestimmten Zahlen geführt worden und läßt sich in gleicher Weise mit je zwei natürlichen Zahlen durchführen. Er gilt aber auch für beliebige Zahlen.

Behauptung. $ab = ba.$ **(11)**

Beweis. Es ist $ab = a + a + a + \cdots + a$ (b mal).

Jedes a zerlegt man in seine Einsen und erhält, wenn man je a Einsen in eine Zeile setzt, b Zeilen von solchen Einsen:

$$ab = \begin{cases} 1+1+1+\cdots+1 \text{ (a mal)} \\ 1+1+1+\cdots+1 \text{ (a mal)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1+1+1+\cdots+1 \text{ (a mal)} \\ \text{(b Zeilen).} \end{cases}$$

Addiert man die senkrecht untereinander stehenden Einsen, so erhält man aus jeder Staffel b, also ist

$$ab = b + b + b + \cdots + b \text{ (a mal)},$$

dies ist aber nach der Definition $b \cdot a$. Also ist $ab = ba$.

Diesen Satz spricht man kurz folgendermaßen aus: Der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Doch darf man nicht übersehen, daß die Anwendung eines Namens für Multiplikandus und Multiplikator erst sachlich berechtigt ist, nachdem man nachgewiesen hat, daß sie miteinander vertauscht werden können, ohne das Ergebnis zu ändern. Die Verwendung des Ausdrucks Faktoren in § 13, Zusatz 1 war also nur eine formelle.

Zusatz. $a + a + a + a = a \cdot 4 = 4a,$
$(a + b) + (a + b) + (a + b) = (a + b) \cdot 3 = 3(a + b).$

Anmerkung 1. Das Vertauschungsgesetz der Multiplikation gilt nicht für benannte Zahlen.

Beweis. Nach der Erklärung der Multiplikation muß der Multiplikator unbenannt sein (§ 13, Zus. 2). Vertauscht man nun Multiplikandus und Multiplikator, z. B. in dem Produkt $3 \text{ kg} \cdot 4$, so erhält man $4 \cdot 3$ kg, d. h. ich soll nach § 13 die vier 3 kg mal als Summand setzen. Das ist sinnlos. Auch darf man sich nicht dadurch täuschen lassen, daß $3 \text{ kg} \cdot 4 = 4 \text{ kg} \cdot 3$ ist, denn hier hat man nicht Multiplikandus und Multiplikator, sondern die in ihnen enthaltenen Zahlen vertauscht.

Da das Vertauschungsgesetz das Fundament aller folgenden Multiplikationsregeln ist, tut man am besten, grundsätzlich nur die in den benannten Zahlen enthaltenen Zahlwerte zu multiplizieren, d. h. die Benennungen fortzulassen und später sinngemäß hinzuzufügen.

Digitized by Google

Anmerkung 2. Soll das Vertauschungsgesetz auch für benannte Zahlen gelten, so muß für die Multiplikation eine andere Erklärung gegeben werden als in § 13, nämlich: Das Produkt wird so aus dem Multiplikandus gebildet wie der Multiplikator aus der Einheit. 3 kg entsteht aus $1 + 1 + 1$ unter Hinzufügung der Bezeichnung kg. Das Produkt $4 \cdot 3$ kg ist also zu bilden aus $4 + 4 + 4$ unter Hinzufügung der Bezeichnung kg. Hierdurch ist die Beschränkung (§ 13, Zus. 2) aufgehoben, daß der Multiplikator unbenannt sein muß. In diesem Sinne kann man auch 3 cm mit 4 cm multiplizieren. 4 cm entsteht aus $1 + 1 + 1 + 1$ durch Hinzufügen der Bezeichnung cm, 3 cm · 4 cm also durch Addition von 3 cm + 3 cm + 3 cm + 3 cm und Hinzufügen des Wortes Zentimeter oder in Zeichen cm. Es ist also 3 cm · 4 cm = 12 cm · cm. Eine solche Rechnung hat nur Sinn, wenn die neue Bezeichnung erklärt werden kann, z. B. cm · cm als ein Quadrat, dessen Seiten je 1 cm lang sind. Ebenso kann man 3 m mit 4 kg multiplizieren und erhält 12 mkg, das einen physikalischen Sinn hat.

Lehrsatz 2. Verbindungsgesetz der Multiplikation. Wenn man ein Produkt mit einer Zahl multipliziert, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man einen Faktor mit der Zahl multipliziert und das so entstandene Produkt mit dem anderen Faktor multipliziert, z. B.

$$(3 \cdot 4) \cdot 5 = (3 \cdot 5) \cdot 4 = (4 \cdot 5) \cdot 3.$$

Behauptung. $(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = (bc) \cdot a.$ **(12)**

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} ab \cdot c &= ab + ab + ab + \cdots ab \text{ (c mal)} \\ &= a + a + a + \cdots + a \text{ (b mal)} \\ &+ a + a + a + \cdots + a \text{ (b mal)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a + a + a + \cdots + a \text{ (b mal)} \\ &\text{(c Zeilen).} \end{aligned}$$

Addiert man die senkrechten Reihen, so erhält man aus der ersten, da c Zeilen vorhanden sind, ac, aus der zweiten ebenso und so fort b mal, d. h. im ganzen $(ac) \cdot b$.

Lehrsatz 3. Multipliziert man eine Zahl mit einem Produkt, so erhält man denselben Zahlenwert, wie wenn man mit den einzelnen Faktoren nacheinander multipliziert.

Behauptung. $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c.$

Beweis. Da bc eine unbenannte Zahl ist, darf ich Multiplikandus und Multiplikator nach Lehrsatz 1 vertauschen. Es ist $a \cdot (bc) = (bc) \cdot a$. Dieses ist aber nach Lehrsatz 2 gleich $(ab) \cdot c$.

Folgerung. Der Wert eines Produktes mehrerer Faktoren ist unabhängig von deren Reihenfolge.

Behauptung. $abc = acb = bac = bca = cab = cba.$ **(12*)**

Digitized by Google

Beweis. Unter abc ist nach § 13, Zus. 1 (ab) · c zu verstehen, dies ist nach Lehrsatz 2 gleich (ac) · b = acb und gleich (bc) · a = bca. Da ab = ba war, ist (ab)c = (ba)c = bac und dies nach Lehrsatz 2 gleich (bc) · a = bca. Endlich ist, da ac = ca ist, (ac) · b = (ca) · b = cab.

Anmerkung 3. In einem Produkt aus mehreren Faktoren darf höchstens ein Faktor benannt sein; dieser ist als Multiplikandus zu betrachten. Das Produkt erhält dieselbe Benennung wie der Multiplikandus.

Anmerkung 4. Nur bei der in Anmerkung 2 gegebenen Definition des Produkts können mehrere Faktoren benannt sein. Eine Kiste von 5 dm Länge, 4 dm Breite, 3 dm Höhe hat den Rauminhalt 5 dm · 4 dm · 3 dm = 60 dm dm dm. Dies dm dm dm läßt sich als ein Würfel auffassen, dessen Kanten je 1 dm lang sind. 1 Kubikdezimeter ist gleich 1 Liter. Vorsichtiger bleibt man bei der einfachsten Erklärung des Produkts (§ 13) und läßt, sobald benannte Zahlen zu multiplizieren sind, alle Benennungen fort, multipliziert die reinen Zahlen und fügt die Benennung sinngemäß hinzu. In dem Beispiel würde man deshalb rechnen 5 · 4 · 3 = 60, und da es sich um das Volumen eines Körpers handelt, getrennt von der Gleichung, schreiben 60 Kubikdezimeter oder Liter.

Folgerung 2. Der Wert eines Produktes aus zwei oder mehreren Produkten ändert sich nicht, wenn man ihre Faktoren in beliebiger Reihenfolge multipliziert. Z. B. (3 ab) · (5 cd) = 15 abcd.

Anmerkung 5. Sind die Faktoren einander gleich, so schreibt man in abgekürzter Form a^2 für aa, a^3 für aaa, a^5 für aaaaa usw. und liest a^2 „a hoch 2", a^5 „a hoch 5". Man nennt eine Größe von der Form a^2, a^3 ... eine Potenz, a ihre Grundzahl oder Basis, 2, 3 usw. ihren Exponenten; a^2 wird auch das Quadrat von a, a^3 der Kubus von a genannt.

Folgerung 3. Sind Potenzen zu multiplizieren, so findet man das Produkt durch Zerlegung in Faktoren und Zusammenfassung:

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa) \cdot (aa) = aaaaa = a^{3+2} = a^5 \text{ (vgl. § 45, L. 1),}$$

$$a^4 \cdot a^5 = (aaaa) \cdot (aaaaa) = aaaaaaaaa = a^{4+5} = a^9, \text{ usw.}$$

Multipliziert man zwei Potenzen derselben Grundzahl, so erhält man den Zahlwert einer Potenz dieser Grundzahl, deren Exponent gleich der Summe der Exponenten beider Potenzen ist.

§ 15.

Dritte Klammerregel (vgl. § 6, Erkl. 2, § 12, F.).

In jedem zusammengesetzten Ausdrucke geht die Rechnung höherer Stufe derjenigen niederer Stufe, also die Multiplikation der Addition, bezüglich Subtraktion vor. Dagegen gilt bei Rechnungen gleicher Stufe die Reihenfolge von links nach rechts. Soll eine andere Reihenfolge eintreten, so wird dies durch Klammern angedeutet; die eingeklammerte Rechnung geht vor.

Digitized by Google

In dem Ausdrucke $a - bc$ ist daher zuerst c mit b zu multiplizieren und das Produkt von a zu subtrahieren, in dem Ausdrucke $(a - b)c$ hat man zuerst b von a zu subtrahieren und die Differenz mit c zu multiplizieren.

Ein Produkt bildet in einem Polynom nur ein Glied; es besteht daher $a + bc + d$ aus drei, $(a + b)c + d$ aus zwei Gliedern.

Lehrsatz 1. Multipliziert man eine Summe mit einer Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man jeden Summanden mit ihr multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert. (Verteilungsgesetz der Multiplikation.)

Behauptung. $(a + b)c = ac + bc.$ (13)

Beweis. $(a + b) \cdot c = (a + b) + (a + b) + \cdots + (a + b)$ (c mal) (nach 10)
$= a + b + a + b + \cdots + a + b$ (c mal) (nach 2)
$= a + a + a + \cdots$ (c mal) $+ b + b + b + \cdots$ (c mal) (nach 1*)
$= ac + bc$ (nach 10).

Dies gilt auch von einer Summe mehrerer Zahlen

$$(a + b + c) \cdot d = ad + bd + cd.$$

Lehrsatz 2. Multipliziert man eine Differenz mit einer Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man Minuendus und Subtrahendus einzeln mit der Zahl multipliziert und das zweite Produkt vom ersten abzieht.

Behauptung. $(a - b)c = ac - bc.$ (14)

Beweis. $(a - b)c = (a - b) + (a - b) + (a - b) + \cdots$ (c mal) (nach 10)
$= a - b + a - b + a - b + \cdots$ (c mal) (§ 12, Folg.)
$= a + a + a \cdots$ (c mal) $- (b + b + b \cdots$ (c mal)) (§ 11, Folg., § 12, Folg. u. § 5, Gr. 4)
$= ac - bc$ (nach 10).

Zusatz. Durch Vertauschung der Seiten der Gleichung (13) und (14), die nach § 5, Gr. 4 gestattet ist, erhält man

$$\begin{aligned} ac + bc &= (a + b) \cdot c \\ ac - bc &= (a - b) \cdot c, \end{aligned} \qquad (13^*)$$

also den Satz: Werden zwei Produkte, welche einen gemeinsamen Faktor haben, addiert oder subtrahiert, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Summe beziehungsweise die Differenz der besonderen Faktoren mit dem gemeinschaftlichen Faktor multipliziert. (Absondern des gemeinschaftlichen Faktors.)

Da $(a + b) \cdot c = c(a + b)$ ist, kann man den gemeinschaftlichen Faktor auch vor die Klammer setzen. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} m(a + b - c - d) &= ma + mb - mc - md \\ &= am + bm - cm - dm = (a + b - c - d)m. \end{aligned}$$

§ 16.

Lehrsatz 1. Multipliziert man eine Summe mit einer Summe, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man jeden Summanden der ersten

Digitized by Google

Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert, z. B.

$$(3+4)(5+7)=3\cdot5+4\cdot5+3\cdot7+4\cdot7=15+20+21+28=84=7\cdot12.$$

Behauptung. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$ **(15)**

Beweis. Setzt man $c+d=m$, so erhält man (nach 13)

$$(a+b)(c+d)=(a+b)m=am+bm=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd=ac+bc+ad+bd.$$

Lehrsatz 2. Multipliziert man eine Summe mit einer Differenz oder eine Differenz mit einer Summe, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man jedes Glied der Summe mit jedem Glied der Differenz multipliziert und die Teilprodukte, welche den Subtrahendus als Faktor enthalten, von der Summe der Teilprodukte, welche den Minuendus enthalten, abzieht, z. B.

$$(3+4)(7-5)=3\cdot7+4\cdot7-3\cdot5-4\cdot5=21+28-15-20=14=7\cdot2.$$

Behauptung 1. $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd.$ **(15*)**

Beweis. Setzt man $c-d=m$, so erhält man (nach 14)

$$(a+b)(c-d)=(a+b)m=am+bm=a(c-d)+b(c-d)$$
$$=ac-ad+bc-bd=ac+bc-ad-bd \text{ (nach § 12).}$$

Behauptung 2. $(a-b)(c+d)=ac-bc+ad-bd.$ **(15**)**

Beweis. Nach dem Vertauschungsgesetz und (15*) ist

$$(a-b)(c+d)=(c+d)(a-b)=ac+ad-bc-bd=ac-bc+ad-bd.$$

Lehrsatz 3. Multipliziert man eine Differenz mit einer Differenz, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man jedes Glied der ersten Differenz mit jedem Glied der zweiten Differenz multipliziert, die Produkte der zwei Subtrahenden zu dem Produkt der zwei Minuenden addiert und von dieser Summe die Teilprodukte subtrahiert, welche aus je einem Minuend und einem Subtrahend gebildet sind, z. B.

$$(12-8)\cdot(7-5)=12\cdot7+8\cdot5-8\cdot7-12\cdot5$$
$$=84+40-56-60=8=4\cdot2.$$

Behauptung. $(a-b)(c-d)=ac+bd-bc-ad.$ **(16)**

Beweis. Es sei $c-d=m$, $bc=p$, $bd=q$. So ist

$$(a-b)(c-d)=(a-b)m \text{ [Gr. 2]}=am-bm \text{ [14]}$$
$$=a(c-d)-b(c-d) \text{ [Gr. 2]}=(c-d)a-(c-d)b \text{ [11]}$$
$$=ca-da-(cb-db) \text{ [14]}=ca-da-(p-q) \text{ [Gr. 2]}$$
$$=ca-da-p+q \text{ [9]}=ca-da-bc+bd \text{ [Gr. 2]}.$$

Um der entsprechenden Anordnung willen schreibt man

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd. \quad \textbf{(16)}$$

Lehrsatz 4. Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt beider Zahlen.

Digitized by Google

Behauptung. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (17)

Beweis. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, § 14, Anm. 5

$(a + b)(a + b) = aa + ba + ab + bb$ (15)

$aa + ab + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2$, § 14, 1. Zusatz

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Lehrsatz 5. Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt beider Zahlen.

Behauptung. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. (18)

Beweis. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, § 14, Anm. 5

$(a - b)(a - b) = aa - ba - ab + bb$ (16)

$aa - ab - ab + bb = a^2 - 2ab + b^2$, § 14, 1. Zusatz

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Lehrsatz 6. Das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen, und umgekehrt: Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Produkte aus der Summe und Differenz der Grundzahlen.

Behauptung. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. (19)

Beweis. $(a + b)(a - b) = aa + ba - ab - bb$ (15*)

$aa + ab - ab - bb = a^2 - b^2$, § 14, Anm. 5

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

B. Von der Division.

§ 17.

Erklärung. Eine Zahl durch eine zweite Zahl dividieren heißt: eine dritte Zahl suchen, welche mit der zweiten multipliziert die erste gibt. Die erste Zahl, welche dividiert wird, heißt der Dividendus, die zweite, durch welche dividiert wird, der Divisor, das Ergebnis der Division der Quotient.

Soll die Zahl a durch b dividiert werden, so setzt man zwischen sie das Zeichen (:) und liest „a dividiert durch b", oder „a durch b". Es bezeichnet also $a : b$ die arithmetische Form der Division, und, wenn c das Ergebnis der Division ist, besteht die Gleichung

$$a : b = c.$$

Wenn daher $a : b = c$ ist, so folgt $bc = a$; umgekehrt, wenn $bc = a$ ist, so folgt $a : c = b$, $a : b = c$. Ist das Produkt $bc = a$, also auch der Multiplikandus b benannt, so löst die Gleichung $a : b = c$ (24 m : 6 m = 4) die Frage, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist. Die Division ist ein Messen, der Quotient eine unbenannte Zahl. Die Gleichung $a : c = b$ (24 m : 4 = 6 m) löst die Frage, wie groß der Teil ist, welcher cmal genommen den Dividendus a hervorbringt. Die Division ist ein Teilen, der Quotient hat die Benennung des Dividendus.

Anmerkung 1. Messen und Teilen kann auch bei unbenannten Zahlen unterschieden werden. Ist ein Produkt und ein Faktor bekannt, so findet man

Digitized by Google

den unbekannten Faktor durch Division, und zwar, wenn es der Multiplikandus ist, durch Teilen, wenn es der Multiplikator ist, durch Messen. Die Aufgabe 12 : 4 gestattet zwei Lösungen. Beim Teilen zerlege ich 12 in 4 gleiche Summanden und gebe die Größe dieses Summanden 3 an, beim Messen untersuche ich, wie oft 4 von 12 subtrahiert werden kann, bis der Rest Null bleibt. Ich finde $12 - 4 - 4 - 4 = 0$, ich muß also die 4 dreimal von 12 subtrahieren. Die Vertauschbarkeit von Multiplikandus und Multiplikator gestattet es, diese zwei durchaus verschiedenen Operationen formell zu der einen, der Division, zusammenzufassen. Auch die Addition hat streng genommen zwei Umkehrungen, je nachdem man den ersten Summand (Augendus) oder den zweiten Summand (Addendus) sucht. Beide sind aber nicht wesentlich verschieden, weil die Reihenfolge der Summanden beliebig ist. Es gilt demnach der Satz: Dürfen bei einer Operation die Rechenzahlen vertauscht werden (Addition, Multiplikation), so hat sie nur eine Umkehrung, und für später sei darauf hingewiesen, daß, wenn die Rechenzahlen nicht vertauscht werden dürfen (Potenzierung), zwei Umkehrungen vorhanden sind.

Anmerkung 2. Es ist oft zweckmäßig, die Division auch ausdrücklich als Teilung zu definieren: Eine Zahl durch eine zweite dividieren heißt die erste in so viel gleiche Summanden zerlegen, wie die zweite angibt. Das Ergebnis ist gleich dem Summanden, z. B.

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3, \text{ also } 12 : 4 = 3$$
$$a = c + c + c \cdots (b\,\text{mal}), \text{ also } a : b = c,$$

oder als Messung: Eine Zahl durch eine zweite dividieren heißt die zweite von der ersten so oft subtrahieren, bis kein Rest übrig bleibt. Das Ergebnis ist gleich der Anzahl der nötigen Subtraktionen, z. B.

$$12 - 4 - 4 - 4 = 0, \text{ also } 12 : 4 = 3$$
$$a - b - b - \cdots (c\,\text{mal}) = 0, \text{ also } a : b = c,$$

Anmerkung 3. Gibt man dem Vertauschungsgesetz die Form: Beim Addieren und Multiplizieren dürfen die erste und zweite Zahl vertauscht werden, ohne daß die dritte (das Ergebnis) sich ändert, so folgt daraus für Subtraktion und Division, daß man die zweite und dritte Zahl vertauschen kann, ohne daß die erste sich zu ändern braucht, um eine richtige Gleichung zu erhalten.

Aus $5 + 7 = 12$ folgt

I. $7 + 5 = 12$ II. $12 - 7 = 5$ III. $12 - 5 = 7$

Aus $3 \cdot 8 = 24$ folgt

I. $8 \cdot 3 = 24$ II. $24 : 3 = 8$ III. $24 : 8 = 3$

oder allgemein aus

$a + b = c$:	I. $b + a = c$	II. $c - a = b$	III. $c - b = a$
$a \cdot b = c$:	I. $b \cdot a = c$	II. $c : a = b$	III. $c : b = a$.

§ 18.

Folgerungen. 1. Wenn man einen Quotienten mit seinem Divisor multipliziert, so erhält man den Dividendus.

Es ist $$(a : b)\, b = a, \tag{20}$$

denn (a : b) ist die Zahl, welche mit b multipliziert a gibt.

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich die Probe auf die Division. Daß

$$a : b = x, \qquad 12 : 4 = 3$$

ist, erkennt man daran, daß

$$x \cdot b = a, \qquad 3 \cdot 4 = 12 \text{ ist.}$$

2. Wenn man ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividiert, erhält man den andern.

Es ist $$(ab) : b = a, \tag{21}$$

denn a ist die Zahl, welche mit b multipliziert ba oder ab gibt.

3. Da eine Zahl a dem Werte nach unverändert bleibt, wenn man sie mit derselben Zahl b nacheinander multipliziert und dividiert, so sind Multiplikation und Division entgegengesetzte Rechnungsarten, also beide von gleicher Stufe.

4. Der Divisor Eins kann beliebig weggelassen und hinzugefügt werden. Es ist $a : 1 = a$, denn $1 \cdot a = a$.

5. Jede Zahl, durch sich selbst dividiert, gibt Eins.
Es ist $a : a = 1$, denn $a \cdot 1 = a$.

Lehrsatz. Dividiert man zwei gleiche Zahlen durch zwei andere gleiche Zahlen, so sind die Quotienten gleich (abgekürzt: Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches).

Voraussetzung. $a = b$, $c = d$.

Behauptung. $a : c = b : d$.

Beweis. $a : c = a : c$, nach § 5, Gr. 1.
Setzt man rechts (nach § 5, Gr. 2) b für a und d für c, so ist

$$a : c = b : d.$$

§ 19.

Die Division a : b ist innerhalb der natürlichen Zahlenreihe nur ausführbar, wenn in derselben eine Zahl c vorhanden ist, welche mit b multipliziert a gibt. Um in dem Falle, daß (a : b) keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe ist, die Division zu ermöglichen, muß man die natürliche Zahlenreihe erweitern. Man teilt dazu die Einheit in b gleiche Teile, nennt jeden Teil $\frac{1}{b}$ (ein b-tel) eine gebrochene Einheit und bildet aus derselben durch Wiederholung neue Zahlen; es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots (b \text{ mal}) &= \frac{1}{b} \cdot b = 1 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots (a \text{ mal}) &= \frac{1}{b} \cdot a \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die neue Zahl $\frac{1}{b} \cdot a$ heißt ein Bruch und wird durch $\frac{a}{b}$ (a b-tel) dargestellt, die gebrochene Einheit $\frac{1}{b}$, durch deren Wiederholung $\frac{a}{b}$ entsteht.

Digitized by Google

wird sein Stammbruch, die Zahl a, welche die Anzahl der gebrochenen Einheiten angibt, der Zähler, die Zahl b, welche die Benennung der gebrochenen Einheiten angibt, der Nenner des Bruches genannt. Ein Bruch heißt echt oder unecht, je nachdem sein Zähler kleiner oder größer als der Nenner, oder er selbst kleiner oder größer als die Einheit ist. Ein aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche bestehender Zahlenausdruck heißt eine gemischte Zahl.

Auch wenn die Division ausführbar ist, kann man das Ergebnis in Form eines Bruches stehen lassen, z. B. $\frac{12}{3}$. Solche Brüche heißen uneigentliche Brüche.

Anmerkung 1. Durch die Einführung der Brüche wird der Begriff der Zahl erweitert. Von solchen Erweiterungen macht die Arithmetik einen ausgiebigen Gebrauch, indem sie dabei das Prinzip der Permanenz oder Ausnahmslosigkeit verwendet. Dies hat Hermann Schubert, nachdem es zuerst H. Hankel ausgesprochen, formuliert. Das Prinzip ist sowohl auf Operationen wie auf Zahlen anwendbar. Seine Fassung für letztere lautet:

Wenn Operationen, die sich mit natürlichen Zahlen ausführen lassen, bei ihrer Umkehrung auf Verknüpfungen von Zahlen und Zeichen führen, deren Ergebnis nicht durch eine natürliche Zahl ausdrückbar ist, so soll diese Verknüpfung selbst als eine „Zahl im erweiterten Sinne" definiert werden, z. B. $\sqrt[3]{5}$.

Für die erweiterten Zahlen können auch besondere Zeichen eingeführt werden, z. B. $\frac{3}{4}$ für 3 : 4; 1,3 für 13 : 10; 0 für 3 — 3. Die Rechenregeln für diese neuen Zahlen dürfen nicht im Widerspruch mit denen für natürliche Zahlen stehen, was bewiesen werden muß. Gewisse Einschränkungen für die neuen Zahlen sind dabei zulässig, z. B. Null darf nicht als Divisor auftreten. Ferner muß definiert werden, was in dem erweiterten Zahlengebiet gleich, größer und kleiner heißt.

Anmerkung 2. Durch die Einführung der Brüche ist die Möglichkeit gegeben, zwischen je zwei Zahlen beliebig viele neue Zahlen einzufügen, z. B. zwischen 2 und 3 die Zahlen $\frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5}$, zwischen $\frac{11}{5}$ und $\frac{12}{5}$ die Zahlen $\frac{56}{25}, \frac{57}{25}, \frac{58}{25}, \frac{59}{25}$ und so fort. Es ist also nicht mehr möglich, wie in der natürlichen Zahlenreihe, zwei benachbarte Zahlen anzugeben. Wohl aber kann man angeben, welcher von zwei Brüchen der größere ist, sobald man beide auf denselben Nenner gebracht hat. Dann hat der größere Bruch den größeren Zähler.

Anmerkung 3. Von besonderem Wert ist die Vertiefung des dekadischen Systems (§ 2) durch die Dezimalbrüche, d. h. Brüche, deren Nenner 10 oder eine Potenz von 10 ist, und die nach Art der ganzen Zahlen geschrieben

Digitized by Google

werden, so daß die Ziffer des Zählers durch ihre Stellung (Position; § 2) zu den Einern zugleich den Nenner bezeichnet, z. B. in 2,13 die 1 durch ihre Stellung angibt, daß $\frac{1}{10}$, die 3 desgleichen, daß $\frac{3}{100}$ gemeint sind. Wenn nun durch Teilung der Einheit in 10 Zehntel und durch Teilung jedes Zehntels in 10 Hundertstel und so fort zwischen zwei ganze Zahlen beliebig viele Zahlen eingeschaltet werden können, so darf nicht die Annahme gemacht werden, daß durch die Dezimalbrüche alle Zahlen genau ausdrückbar sind. Schon für $\frac{1}{3}$ stoßen wir auf die unendliche Reihe 0,333..., diese ist aber wenigstens periodisch, d. h. aus wiederkehrenden Ziffern gebildet. Ein unendlicher unperiodischer Dezimalbruch gibt aber nur die Grenzen an, zwischen welchen eine Zahl liegt. Wenn die Länge des Kreisbogens für den Durchmesser 1 mit 3,14 angegeben wird, so heißt das, sie liegt zwischen 3,135 und 3,144, und hieran wird im Prinzip nichts geändert, auch wenn 35 Ziffern (Ludolph van Ceulen um 1600) oder 200 (Dase, † 1861) berechnet werden. Daß die Zahlenreihe, die bildlich durch eine Gerade (§ 2) dargestellt wird, diese Gerade lückenlos ausfüllt, ist eine von G. Cantor aufgestellte Hypothese. Da wir nun Zahlen kennen, die nicht durch Brüche genau ausgedrückt werden können, und die doch auch auf der Zahlengeraden einen Platz finden müssen, füllen die Brüche allein die Zahlenreihe nicht aus.

Lehrsatz. Ein Bruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividendus der Zähler und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist.

Behauptung. $\frac{a}{b} = a : b.$ (23)

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot b = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots (a\,\text{mal})\right) \cdot b$ (nach 22)

$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots (a\,\text{mal})\right) b = \frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot b + \ldots (a\,\text{mal})$ (13)

$\frac{1}{b} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot b + \ldots (a\,\text{mal}) = 1 + 1 + 1 \ldots (a\,\text{mal})$ (22)

$\therefore$ (folglich) $\frac{a}{b} \cdot b = a$ (§ 5, Zusatz).

Es ist $(a : b) \cdot b = a$ (20)

$\therefore \frac{a}{b} \cdot b = (a : b) \cdot b$ (§ 5, 3).

Dividiert man beide Seiten durch b, so fällt der Multiplikator b fort, und nach § 18, Lehrsatz müssen die Quotienten gleich sein, also:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Zusatz. Statt des Divisionszeichens ist es nunmehr gestattet, stets den Bruchstrich anzuwenden und umgekehrt, ebenso können die Ausdrücke Bruch und Quotient als gleichwertig betrachtet werden.

Digitized by Google

§ 20.

Lehrsatz 1. Dividiert man eine Summe durch eine Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man jeden Summanden durch sie dividiert und die Quotienten addiert. (Verteilungsgesetz der Division.)

Behauptung. $$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}. \tag{24}$$

Beweis. Multipliziert man die rechte Seite mit dem Divisor c, so erhält man:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c \text{ (nach 13)} = a+b \text{ (nach 20)}.$$

Lehrsatz 2. Dividiert man eine Differenz durch eine Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man Minuendus und Subtrahendus durch sie dividiert und letzteren Quotienten vom ersteren subtrahiert:

Behauptung. $$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}. \tag{25}$$

Beweis. Es ist

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c-\frac{b}{c}\cdot c=a-b.$$

Durch Vertauschung der beiden Seiten von (24) und (25) ergibt sich:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \tag{24*}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}. \tag{25*}$$

Gleichnamige Brüche, d. h. solche mit gleichem Nenner, liefern bei der Addition und Subtraktion denselben Zahlwert, wie wenn man die Summe beziehungsweise Differenz der Zähler durch den Nenner dividiert.

Folgerung. Es ist auch

$$\frac{a+b-c-d}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}$$

und umgekehrt.

§ 21.

Lehrsatz 1. Multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Zähler mit ihr multipliziert und das Produkt durch den Nenner dividiert.

Behauptung. $$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}. \tag{26}$$

Digitized by Google

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots \text{(c mal)} = \frac{a + a + \ldots \text{(c mal)}}{b}$ (nach 24)

$$= \frac{ac}{b} \text{ (nach 10).}$$

Durch Vertauschung der Seiten von (26) erhält man

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

Dividiert man ein Produkt durch eine Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man einen Faktor durch die Zahl dividiert und den Quotienten mit dem andern multipliziert.

Erklärung. Wendet man auf die linke Seite von (26) das Vertauschungsgesetz an, so erhält man

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}. \tag{27}$$

Die linke Seite der Gleichung hat hier nach § 13 keinen Sinn, wenn $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch ist. $5 \cdot \frac{3}{4}$ heißt ja nach der Erklärung des Produkts, man soll 5 dreiviertelmal als Summand setzen.

Hier tritt das Permanenzprinzip der Operationen in Kraft (vgl. § 19, Anm. 1), welches lautet: Hat eine Operation mit natürlichen Zahlen einen Sinn, der bei Einführung neuer Zahlen verloren geht, so kann der Operation ein erweiterter Sinn beigelegt werden, vorausgesetzt, daß die Ausführung der Operation nicht im Widerspruch zu Regeln steht, die für natürliche Zahlen gelten.

Dieser erweiterte Sinn ergibt sich aus der Festhaltung einer für natürliche Zahlen geltenden Gleichung. Es ist $\frac{12}{3} \cdot 5 = \frac{12 \cdot 5}{3}$ nach (26). Da $\frac{12}{3} = 4$ ist, darf ich das Vertauschungsgesetz anwenden und erhalte $5 \cdot \frac{12}{3} = \frac{5 \cdot 12}{3}$. Die Multiplikation mit einem uneigentlichen Bruch kann also ersetzt werden durch Multiplikation mit dem Zähler und Division des Ergebnisses durch den Nenner. Denselben Sinn soll nun auch die Multiplikation mit einem echten Bruch haben, und diese wird hierdurch erklärt (definiert). $5 \cdot \frac{3}{4}$ heißt also $(5 \cdot 3) : 4$. Dies kann man nicht beweisen, aber man kann und muß zeigen, daß es nicht im Widerspruch zu früheren Regeln steht. Es ist nämlich, wenn man mit 4 multipliziert, $5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = 5 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 4\right) = 5 \cdot 3$, ebenso ist $[(5 \cdot 3) : 4] \cdot 4 = 5 \cdot 3$ nach (20), demnach sind nach § 18, Lehrsatz, auch die ursprünglichen Ausdrücke gleich, d. h. $5 \cdot \frac{3}{4} = (5 \cdot 3) : 4$. Die linke Seite

Digitized by Google

dieser Gleichung hätte aber überhaupt keinen Sinn, wenn nicht die rechte als Erklärung hinzugefügt wäre.

Diese Erweiterung des Begriffes Multiplikation erweist sich als fruchtbar dadurch, daß man jetzt die Geltung früherer Regeln über ganze Zahlen auch für gebrochene beweisen kann, zum Beispiel das Verbindungsgesetz (12):

$$(a \cdot b) \cdot \frac{c}{d} = \frac{(ab) \cdot c}{d} = \frac{(ac) \cdot b}{d} = \frac{ac}{d} \cdot b = \left(a \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot b$$

oder das Verteilungsgesetz

$$(a + b) \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a+b) \cdot c}{d} = \frac{ac + bc}{d} = \frac{ac}{d} + \frac{bc}{d} = a \cdot \frac{c}{d} + b \cdot \frac{c}{d}.$$

Die Multiplikation mit einem Bruch ist eine künstliche Operation, die dem ungeschulten Verstand widersinnig erscheint, da dieser von einer Multiplikation stets eine Vergrößerung erwartet.

Lehrsatz 2. Dividiert man eine Zahl durch ein Produkt, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Zahl durch die Faktoren nacheinander dividiert.

Behauptung.
$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c. \tag{28}$$

Beweis. Multipliziert man beide Seiten mit bc, so erhält man dasselbe Ergebnis:

$\frac{a}{bc} \cdot bc = a$ (nach 20), $\left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot bc = \left[\left(\frac{a}{b} : c\right) c\right] \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b$ (nach § 18, 3) $= a$.

Durch Vertauschung der Seiten von (28) erhält man:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}. \tag{28*}$$

Dividiert man einen Bruch durch eine Zahl, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man den Zähler durch das Produkt des Nenners und der Zahl dividiert.

Lehrsatz 3. Dividiert man eine Zahl durch einen Bruch, so erhält man denselben Wert, wie wenn man die Zahl mit dem Nenner multipliziert und das Produkt durch den Zähler dividiert. (Abgekürzt: Statt durch einen Bruch zu dividieren, kann man mit dem umgekehrten Bruch multiplizieren.)

Behauptung.
$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}. \tag{29}$$

Beweis. Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{b}{c}$, so erhält man dasselbe Ergebnis

$\left(a : \frac{b}{c}\right) \cdot \frac{b}{c} = a$ (20); $\left(a \cdot \frac{c}{b}\right) \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{ac}{b}\right) \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{ac}{b} \cdot b\right) : c = (ac) : c = a$,

durch wiederholte Anwendung von (27) und (21).

Digitized by Google

Lehrsatz 4. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Behauptung. $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. (30)

Beweis. Multipliziert man beide Seiten mit bm, so erhält man dasselbe Ergebnis am, folglich sind auch die ursprünglichen Werte gleich.

Zusatz 1. Einen Bruch erweitern heißt: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren.

Einen Bruch heben heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren, oder aus Zähler und Nenner denselben Faktor fortlassen.

Die Erweiterung dient dazu, mehrere Brüche gleichnamig zu machen, sie auf den Hauptnenner zu bringen.

Zusatz 2. $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = a^{5-3} = a^2$, $\frac{b^4}{b^3} = \frac{bbbb}{bbb} = b^{4-3} = b$.

Dividiert man eine Potenz durch eine Potenz von derselben Grundzahl, aber niedrigerem Exponenten, so erhält man eine Potenz derselben Grundzahl, deren Exponent die Differenz der Exponenten beider Potenzen ist. Abgekürzt: Statt gleichbasige Potenzen zu dividieren, kann man ihre Exponenten subtrahieren.

§ 22.

Lehrsatz 1. Multipliziert man einen Bruch mit einem Bruch, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

Behauptung. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. (31)

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d$ (27) $= \frac{ac}{b} : d$ (26) $= \frac{ac}{bd}$ (28).

Zusatz. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Zwei Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist, heißen reziproke (umgekehrte) Werte voneinander. a ist der reziproke Wert von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}$ der von a. $\frac{4}{3}$ ist der reziproke Wert von $\frac{3}{4}$.

Lehrsatz 2. Dividiert man einen Bruch durch einen zweiten Bruch, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man ihn mit dem umgekehrten zweiten Bruche multipliziert.

Behauptung. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. (32)

Digitized by Google

Beweis. Nach § 21. Lehrsatz 3, ist die Division durch einen Bruch durch Multiplikation mit dem umgekehrten Bruch ersetzbar.

Lehrsatz 3. Addiert man einen Bruch zu einem Bruch, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man den Zähler jedes Bruches mit dem Nenner des andern Bruches multipliziert und die Summe dieser Produkte durch das Produkt der Nenners dividiert.

Behauptung. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. (33)

Beweis. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}$ (30) $=\frac{ad+bc}{bd}$ (24*).

Lehrsatz 4. Subtrahiert man einen Bruch von einem Bruch, so erhält man denselben Zahlwert, wie wenn man den Zähler des Minuend mit dem Nenner des Subtrahend und den Zähler des Subtrahend mit dem Nenner des Minuend multipliziert und die Differenz dieser Produkte durch das Produkt der Nenner dividiert.

Behauptung. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$. (33*)

Beweis. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{db}$ (30) $=\frac{ad-bc}{bd}$ (24*).

Anmerkung 1. Lehrsatz 3 und 4 finden besonders bei Stammbrüchen Verwendung: $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{7+5}{7\cdot5}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{7-5}{7\cdot5}$.

Anmerkung 2. Die gebrochenen Zahlen sind nach dem Permanenzprinzip der Zahlen eingeführt worden, um eine Division auch dann als ausführbar betrachten zu können, wenn der Dividendus nicht ein Produkt aus dem Divisor und einem andern Faktor ist. $12:3$ ist ausführbar, weil $12=3\cdot4$ ist, Division ist also hier Fortlassung eines Faktors. Die Berechtigung der Einführung der gebrochenen Zahlen neben den natürlichen, die nun im Gegensatz ganze Zahlen heißen, ergibt sich daraus, daß das Kommutations (Vertauschungs)-, Assoziations (Verbindungs)- und Distributions-(Verteilungs)-Gesetz für gebrochene Zahlen ebenso wie für ganze Zahlen gelten.

Es ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$,

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$.

Es gelten auch die Definitionsgleichungen der Subtraktion und der Division

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2};\quad \left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Eine Erweiterung erfuhr dabei die Definition der Multiplikation, weil der Bruch im Grunde eine benannte Zahl ist ($\frac{3}{4}$ sind 3 Viertel), und eine

Digitized by Google

solche nicht als Multiplikator auftreten durfte, wenn man nicht die in § 14, Anmerkung 2 gegebene Definition anwendet. Danach ist $3 \cdot \frac{4}{5}$ ebenso aus 3 zu bilden, wie $\frac{4}{5}$ aus 1 entstanden ist, d. h. durch Division durch 5 und Multiplikation mit 4. Die Definition der Division brauchte nicht erweitert zu werden, weil sie rein formell auf die Multiplikation begründet ist: Der Quotient zweier Zahlen ist die dritte Zahl, welche, mit der zweiten multipliziert, die erste ergibt. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ ist $\frac{21}{20}$, weil $\frac{21}{20} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{4}$ ist.

Dagegen bedarf noch das Teilen und Messen als getrennte Operation einer Betrachtung. Ist das Resultat eine ganze Zahl, z. B. $12 : \frac{3}{4} = 16$, so läßt sich eine ungezwungene Erklärung für das Messen geben. Die Aufgabe lautet ja: Wie oft kann $\frac{3}{4}$ von 12 abgezogen werden? Das ist 16mal möglich. Wenn man den Bruch als benannte Zahl auffaßt, d. h. $\frac{3}{4}$ als 3 Viertel, so muß man nur den Dividendus auf dieselbe Benennung bringen. 12 Ganze sind 48 Viertel. 3 Viertel sind in 48 Viertel 16mal enthalten. Ist das Resultat keine ganze Zahl, z. B. $5 : \frac{3}{4}$, so wird die Erklärung gezwungen: 3 Viertel sind in 20 Viertel $6\frac{2}{3}$mal enthalten. Was aber $\frac{2}{3}$mal bedeuten soll, nämlich der dritte Teil zweimal, dürfte dem ungeschulten Verständnis nicht unmittelbar einleuchten. Immerhin geht es noch an zu sagen: 3 Viertel sind in 20 Viertel 6mal voll enthalten, und der Rest enthält noch den dritten Teil von 3 Viertel, nämlich 1 Viertel zweimal. Dagegen widerspricht es der Definition des Teilens, wonach der Teiler eine unbenannte Zahl sein muß, von einem Teilen durch einen Bruch zu sprechen. Es läßt sich schlechterdings kein Sinn angeben, selbst wenn das Resultat eine ganze Zahl ist, was darunter zu verstehen sei: 12 in $\frac{3}{4}$ Summanden zu zerlegen.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Die vier Spezies in relativen Zahlen, nebst Null und Unendlich.

1. Kapitel. Von der Null und dem Unendlichen.

§ 23.

Die natürliche Zahlenreihe (§ 2) bildet eine mit der Eins beginnende, unbegrenzt fortlaufende Reihe von Zahlen, welche durch Wiederholung der Eins erhalten wird. Sie wurde bildlich (§ 3) durch einen vom Anfangspunkte A ausgehenden Halbstrahl dargestellt, auf welchem man von A die Längeneinheit wiederholt aneinanderschließend abtrug. Die Zahl a bezeichnete den Abstand des a^{ten} Teilpunktes vom Anfangspunkte.

Die Differenz $a - b$ wurde erhalten (§ 9), indem man von a um b Einheiten zurückzählte, wobei $a > b$ vorausgesetzt wurde. Setzt man in ihr $a = b$, d. h. zählt man von a um a Einheiten zurück, so gelangt man zum Anfangspunkte der Zahlenreihe. Das Nichtvorhandensein eines Abstandes vom Anfangspunkte wird mit Null (0) bezeichnet; man setzt daher

$$a - a = 0 \qquad (34)$$

und erklärt die Null als eine Differenz, in welcher der Minuendus gleich dem Subtrahendus ist. Es ist also auch $b - b = 0$, ebenso die Differenz von je zwei gleichen Zahlausdrücken, also $(a + b) - (b + a) = 0$, $(a - b) - (a - b) = 0$, $ab - ba = 0$, $a : b - \frac{a}{b} = 0$. Den Anfangspunkt der Zahlenreihe bezeichnet man nunmehr mit 0.

Da 0 das Ergebnis einer Subtraktion ist, und diese die Umkehrung einer mit natürlichen Zahlen stets ausführbaren Operation, nämlich der Addition, ist, so darf nach dem Prinzip der Permanenz der Zahlen (§ 19) die 0 als eine Zahl im erweiterten Sinne betrachtet werden, soweit sich beweisen läßt, daß die Operationen mit der Null nicht zu Ergebnissen führen, die im Widerspruch gegen die Regeln für natürliche Zahlen stehen.

Zu dem Zweck rechnet man mit der neuen Zahl, wie wenn sie eine natürliche Zahl wäre, und definiert die Operation, wenn sie ein brauchbares Ergebnis liefert, im Sinne dieses Ergebnisses. (Prinzip der Permanenz der Operationen, § 21.)

Nach (4) ist $(a + b) - b = a$, wendet man hierauf (8) an, so ist $a + (b - b) = a$, also $a + 0 = a$.

Nach (3) ist $(a - b) + b = a$, wendet man hierauf (9*) an, so ist $a - (b - b) = a$, also $a - 0 = a$.

Digitized by Google

Nach (14) ist $(a-a)\cdot b = ab - ab$ und dies nach (34) gleich Null.

Nach (25) ist $(a-a):b = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}$ und dies nach (34) gleich Null.

Danach ergeben sich folgende Formeln:

1. $a + 0 = a.$ (35)
2. $a - 0 = a.$ (35*)
3. $0 \cdot a = 0.$ (36)
4. $0 : a = 0.$ (37)

Wendet man auf 1 und 2 das Vertauschungsgesetz an, so erhält man

5. $0 + a = a.$ 6. $a \cdot 0 = 0.$

Beide stellen eine Erweiterung der Definition von Summe und Produkt dar, die im Sinne dieser Gleichungen gegeben werden darf, weil sie früheren Regeln nicht widerspricht.

Es ist, wenn man für Null $b - b$ setzt:

$(b-b) + a = a + (b-b) = (a+b) - b = a.$ (1) (8) (4)

$a(b-b) = (b-b)\cdot a = ab - ab = 0.$ (11) (13) (34)

Unter einer Summe von Zahlen, deren eine Null ist, versteht man die Summe der übrigen Zahlen. Unter einem Produkt, dessen Multiplikator Null ist, versteht man Null.

Hieraus ergeben sich die weiteren Regeln:

7. $0 + 0 = 0,$ 8. $0 \cdot 0 = 0,$

da $(a-a) + (b-b) = (a+b) - (a+b) = 0,$

und $(a-a)\cdot(b-b) = ab - ab - ab + ab = 0$ ist.

Auch das Verbindungsgesetz führt zu keinen Widersprüchen:

$(a+b) + 0 = (a+b) + (c-c) = a + c - c + b = (a+0) + b$

$(ab)\cdot 0 = (ab)(c-c) = (c-c)\cdot ab = [(c-c)\cdot a]\cdot b = [a(c-c)]\cdot b$

$= (a\cdot 0)\cdot b.$

Ebensowenig das Verteilungsgesetz

$(a+0)\cdot b = (a + (c-c))b = ab + (c-c)b = ab + 0\cdot b$

$(a+b)\cdot 0 = (a+b)(c-c) = ac + bc - ac - bc = ac - ac + bc - bc$

$= a(c-c) + b(c-c) = a\cdot 0 + b\cdot 0.$

Die Addition und Multiplikation dürfen also unbedenklich ausgeführt werden, auch wenn ein Summand oder ein Faktor Null ist; im ersteren Fall ist die Summe gleich dem andern Summanden, im letzteren das Produkt gleich Null.

Bei der Subtraktion darf vorläufig nur der Subtrahendus Null sein, und ist die Differenz dann gleich dem Minuendus. Ist der Minuendus Null, so erfordert dies eine neue Erweiterung des Zahlbegriffs (vgl. § 25).

Bei der Division darf der Dividendus Null sein, der Quotient ist dann auch Null. Dagegen darf der Divisor *nicht* Null sein, da dies zu Widersprüchen führt. Es ist $5\cdot 0 = 0$, $7\cdot 0 = 0$, also $5\cdot 0 = 7\cdot 0$. Dividiert man beide Seiten durch Null und versteht unter Division die Fortlassung eines Faktors (§ 22, Anm.), so erhält man die unsinnige Gleichung $5 = 7$. Deutet man die Rechnung nur an, so erhält man $\frac{5\cdot 0}{0} = \frac{7\cdot 0}{0}$ oder $5\cdot\frac{0}{0} = 7\cdot\frac{0}{0}$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat aber bisher keinen Sinn erhalten.

Digitized by Google

Für die Null gelten also die folgenden praktischen Regeln:

1. Eine Zahl behält denselben Wert, wenn man Null zu ihr addiert oder von ihr subtrahiert.

2. Ein Produkt hat den Wert 0, wenn einer oder mehrere Faktoren Null sind, und umgekehrt: Hat ein Produkt den Wert 0, so hat mindestens ein Faktor den Wert 0.

3. Wenn man 0 durch eine Zahl dividiert, so hat der Quotient den Wert 0.

4. Durch Null darf man nicht dividieren.

§ 24.*

Erklärung. Eine Zahl, welche größer als jede angebbare Zahl gedacht wird, heißt unendlich groß und wird mit ω bezeichnet.

Denkt man sich den Abstand (01) der Zahlenreihe in 10, 100, 1000 usw. gleiche Teile zerlegt, so wird, je mehr die Zahl der Teile zunimmt, der Abstand des ersten Teilpunktes vom Nullpunkte um so kleiner werden. Eine Zahl, welche kleiner als jeder angebbare Bruch gedacht wird, heißt unendlich klein und wird mit δ bezeichnet.

Sowohl das δ wie das ω dürfen aber nicht als eine feststehende Zahl, sondern müssen als veränderlich angesehen werden, δ kann sich beliebig verkleinern, ω beliebig wachsen.

Dividiert man 1 der Reihe nach durch $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \cdots$, so wird der Quotient 10, 100, 1000 $\cdots$ usw., d. h. je kleiner der Divisor wird, desto größer wird der Quotient. Ist der Divisor unendlich klein (δ) angenommen, so muß der Quotient unendlich groß (ω) werden. Es ist also $\frac{1}{\delta} = \omega$.

Läßt man nun den Divisor bis an die Grenze (limes) des Kleinen abnehmen, so erreicht er den Wert 0, dies schreibt man $\lim \delta = 0$. Dann wird aber auch der Quotient $\frac{1}{\delta}$ größer als alle die unendlich großen ω werden, diesen Wert bezeichnet man mit ∞. Es ist also $\lim \omega = \infty$.

Der Grenzwert einer unendlich kleinen Zahl ist Null (0), der Grenzwert einer unendlich großen Zahl ist Unendlich (∞).

Aus der Gleichung $\frac{1}{\delta} = \omega$ folgert man $\frac{1}{\lim \delta} = \lim \omega$, also $\frac{1}{0} = \infty$. Dies schreibt man auch in der Form

$$\lim \left[\frac{1}{n}\right]_{n=0} = \frac{1}{0} = \infty. \qquad (38^*)$$

Definiert man das Dividieren durch Null als ein Messen, so wird man also sagen, man muß 0 unendlich (∞) mal von 1 abziehen, um 0 zu erhalten.

Digitized by Google

Dividiert man 1 der Reihe nach durch 10, 100, 1000 $\cdots$, so wird der Quotient $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \cdots$, d. h. je größer der Divisor wird, um so kleiner wird der Quotient. Ist der Divisor unendlich groß (ω), so wird der Quotient unendlich klein. Es ist also $\frac{1}{\omega} = \delta$.

Geht man auch hier zu $\lim \omega = \infty$ und $\lim \delta = 0$ über, und folgert $\frac{1}{\lim \omega} = \lim \delta$, so ist $\frac{1}{\infty} = 0$. Dies schreibt man in der Form

$$\lim \left[\frac{1}{n}\right]_{n=\infty} = \frac{1}{\infty} = 0. \tag{38}$$

Definiert man hier das Dividieren als ein Teilen, so wird man sagen, man muß 1 in unendlich (∞) viele gleiche Summanden zerlegen, damit der einzelne gleich 0 werde.

Versteht man unter a eine endliche Zahl, die also nicht δ, geschweige denn 0, nicht ω, geschweige denn ∞ sein darf, so kann ich a durch Division mit einer hinreichend kleinen Zahl beliebig groß, durch Division mit einer hinreichend großen Zahl beliebig klein machen. Es ist also auch $\frac{a}{\delta} = \omega$ und $\frac{a}{\omega} = \delta$, und ebenso gelten die Formeln

$$\lim \left[\frac{a}{n}\right]_{n=0} = \frac{a}{0} = \infty. \tag{39*}$$

$$\lim \left[\frac{a}{n}\right]_{n=\infty} = \frac{a}{\infty} = 0. \tag{39}$$

Da sowohl $\frac{1}{0} = \infty$ als auch $\frac{a}{0} = \infty$ und ebenso $\frac{b}{0} = \infty$, so sieht man, daß hier die übliche Definition des Quotienten versagt, denn danach wäre $\infty \cdot 0$ sowohl gleich 1 als auch gleich a, als auch gleich b. Der Ausdruck $0 \cdot \infty$ ist unbestimmt, was nicht ausschließt, daß Ausdrücke, die unter dieser Form erscheinen, bestimmt werden können. Nun war

$$0 + 0 + 0 + \cdots (\text{a mal}) = 0, \qquad 0 \cdot a = 0, \qquad \frac{0}{a} = 0.$$

Nimmt man an, daß ∞ die größte denkbare Zahl ist, so ist

$$\infty + a = \infty, \qquad \infty - a = \infty, \qquad \infty + \infty + \infty = \infty, \qquad \infty \cdot a = \infty,$$
$$\infty : a = \infty. \tag{40}$$

Dagegen ist nicht nur der Ausdruck $0 \cdot \infty$ unbestimmt, sondern auch der Ausdruck $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$. Denn jede endliche Zahl mit 0 multipliziert gibt 0 und mit unendlich multipliziert ∞. Auch $\infty - \infty$ ist unbestimmt, denn es war sowohl $\infty - a = \infty$ als auch $\infty - b = \infty$. (41)

Digitized by Google

2. Kapitel. Von den relativen Zahlen.

A. Positive und negative Zahlen.

§ 25.

Ist in der Differenz a — b der Minuendus kleiner als der Subtrahendus, so können von den Einheiten des Minuendus nur so viele (a) Einheiten abgezogen werden, als er enthält; es bleiben noch die übrigen Einheiten abzuziehen. Innerhalb der bisherigen Zahlenreihe ist dieser Forderung nicht zu genügen. Um sie erfüllbar zu machen, wird die Zahlenreihe und der Begriff der Addition erweitert.

Man unterscheidet dazu in der die Zahlenreihe darstellenden Geraden zwei entgegengesetzte Richtungen und nennt eine Zahl, um deren Einheiten man in der einen Richtung der Zahlenreihe nach vorwärts (nach rechts) gehen soll, eine positive Zahl, setzt vor eine solche Zahl, als eine zu addierende, das Zeichen (+) und nennt die Richtung in der Zahlenreihe nach vorwärts, von je einer Zahl zur nächstfolgenden, die positive.

Eine Zahl, um deren Einheiten man in der Zahlenreihe rückwärts (nach links) zählen soll, heißt eine negative Zahl; man setzt vor eine solche, als eine zu subtrahierende, das Zeichen (—) und nennt die Richtung in der Zahlenreihe nach rückwärts, von je einer Zahl zur vorangehenden, die negative.

Man erweitert nun den Begriff der Addition, indem man das Weiterzählen von irgendeinem Punkte der Zahlenreihe als ein Hinzufügen, Addieren, von positiven oder negativen Einheiten betrachtet, je nachdem die Richtung, in welcher man weiterzählt, die positive oder negative ist. Daraus folgt:

$$a + (+b) = a + b, \qquad a + (-b) = a - b. \tag{42}$$

Die Klammergrößen (+ b) und (— b) heißen relative Zahlen, die Zeichen (+) und (—), welche angeben, in welcher Richtung von einem Punkte der Zahlenreihe weitergezählt werden soll, heißen ihre Vorzeichen, die Zahl b, um deren Einheiten weitergezählt werden soll, ihr absoluter Wert. Relative Zahlen mit denselben Vorzeichen werden gleichsinnige, relative Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen entgegengesetzte genannt. Ein Zahlzeichen ohne Vorzeichen bedeutet eine positive Zahl.

Ist nun in der Differenz a — b, z. B. 4 — 7, der Subtrahendus größer als der Minuendus, so ist das Ergebnis, da nur a (4) Einheiten abgezogen werden können, eine noch zu subtrahierende Zahl, eine negative Zahl (— 3). Setzt man b = a + c, so ist

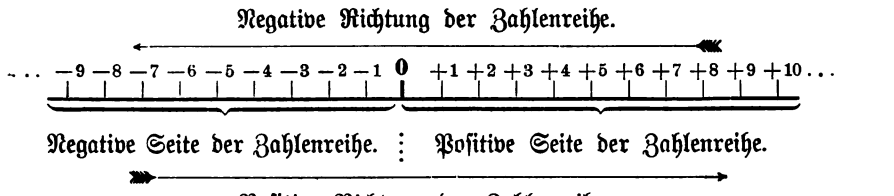
$$a - (a + c) = a - a - c = 0 - c = -c.$$
$$4 - 7 = 4 - (4 + 3) = -3.$$

Ist der Subtrahendus um eine Einheit größer als der Minuendus, so erhält man: — 1, ist er um zwei Einheiten größer: — 2 usw. Läßt man den Subtrahendus immer um eine Einheit zunehmen, so erhält man die unbegrenzte Reihe der negativen Zahlen.

Zählt man in der die Zahlenreihe darstellenden Geraden z. B. von 4 um 7 Einheiten rückwärts, so gelangt man zu einem Punkte auf der Rückverlängerung der bisherigen Zahlenlinie, welcher vom Nullpunkte um 3 Einheiten

Digitized by Google

entfernt ist. So erkennt man, daß die negativen Zahlen die über den Nullpunkt hinausgehende unendliche Verlängerung in negativer Richtung bilden. Die Zahlen -1, -2, -3 usw. stellen die Abstände vom Nullpunkte in negativer Richtung dar.



Zu den Zahlen auf der einen Seite des Nullpunktes gelangt man durch wiederholte Addition der positiven Einheit. Diese Seite heißt daher die positive Seite der Zahlenreihe, und die auf ihr liegenden Zahlen heißen die positiven.

Zu den Zahlen auf der anderen Seite gelangt man durch wiederholte Addition der negativen Einheit. Diese Seite heißt daher die negative Seite der Zahlenreihe, und die auf ihr liegenden Zahlen heißen die negativen.

Die Richtung von dem negativen Unendlichen zu dem positiven Unendlichen ist die positive Richtung, die umgekehrte Richtung die negative. Aus jeder Zahl entsteht die nächstfolgende durch Addition einer Einheit in positiver Richtung; aus jeder Zahl entsteht die nächst vorhergehende durch Subtraktion einer Einheit.

$$-7+1=-6, \quad 4+1=5, \quad 5-1=4, \quad -6-1=-7.$$

Die vollständige, nach beiden Seiten unbegrenzte Zahlenreihe hat also alle Eigenschaften der einseitigen Zahlenreihe.

Eine Zahl, sie mag auf der positiven oder negativen Seite liegen, heißt größer als eine andere, wenn man zur letzteren eine positive Zahl addieren muß, um zur ersteren zu gelangen. Es ist also:

$$-7<+2, \qquad -3>-5, \qquad -9<-7<+4.$$

Derselbe Gegensatz, welcher bei dem Weiterzählen in der Zahlenreihe hervortritt, zeigt sich bei den Veränderungen mannigfacher Größenarten: bei Vermögensänderungen in Einnahme und Ausgabe, in Gewinn und Verlust, bei Längenänderungen in Verlängerung und Verkürzung, bei Ortsveränderungen in der Richtung der Bewegung nach aufwärts und abwärts, nach vorwärts und rückwärts, bei Temperaturänderungen in Erwärmung und Abkühlung, bei Veränderung eines Winkels in dem Sinne der Drehung des beweglichen Schenkels. Die relativen Zahlen finden Anwendung, wenn bei den Veränderungen einer Größenart ein solcher Gegensatz zweier entgegengesetzten Größen hervortritt, daß die Hinzufügung der einen zur anderen eine Verminderung der letzteren hervorbringt. Bei Kapitaländerungen bedeutet also $(+a)\,\mathcal{M}$ eine Einnahme von $a\,\mathcal{M}$, $(-a)\,\mathcal{M}$ eine Ausgabe von $a\,\mathcal{M}$, $a\,\mathcal{M}$ den zugehörigen absoluten Wert. Bei Ortsveränderungen bezeichnen a Schritte eine absolute

Digitized by Google

Zahl, (+ a) Schritte: a Schritte vorwärts, (— a) Schritte: a Schritte rückwärts; bei Änderungen eines Winkels bedeutet (+ α) einen Winkel, welcher durch eine linke Drehung (gegen den Sinn der Uhrzeigerdrehung), (— α) einen Winkel, der durch eine rechte Drehung entstanden ist.

B. Addition relativer Zahlen.

§ 26.

Lehrsatz 1. Gleichsinnige Zahlen werden addiert, indem man der Summe ihrer absoluten Werte das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

Behauptung.
$$\left.\begin{aligned}(+a)+(+b)&=+(a+b)\\(-a)+(-b)&=-(a+b)\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Beweis. 1. (+ a) bedeutet eine Zahl, welche dadurch entstanden ist, daß man von einem Punkte der Zahlenreihe um a Einheiten in positiver Richtung vorwärts zählte. Fügt man b Einheiten in derselben Richtung hinzu, so ist man (a + b) Einheiten vom Ausgangspunkte in positiver Richtung entfernt, folglich ist (+ a) + (+ b) = + (a + b).

2. (— a) bedeutet eine Zahl, welche dadurch entstanden ist, daß man von einem Punkte der Zahlenreihe um a Einheiten in negativer Richtung, also rückwärts zählte. Zählt man nun um b Einheiten in derselben Richtung weiter, so ist man (a + b) Einheiten vom Ausgangspunkte in negativer Richtung entfernt, folglich ist (— a) + (— b) = — (a + b).

Lehrsatz 2. Entgegengesetzte Zahlen werden addiert, indem man den kleineren absoluten Wert vom größeren abzieht und der Differenz das Vorzeichen des größeren gibt.

Behauptung.
$$\left.\begin{aligned}(+a)+(-b)&=+(a-b)=-(b-a),\text{ je nachdem } a\gtrless b.\\(-b)+(+a)&=+(a-b)=-(b-a),\text{ je nachdem } a\gtrless b.\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Beweis. (+ a) bedeutet eine Zahl, welche dadurch entstanden ist, daß man von einem Punkte der Zahlenreihe um a Einheiten in positiver Richtung vorwärts zählte. Zählt man um b Einheiten in entgegengesetzter Richtung weiter, so gelangt man zu einem Punkte der Zahlenreihe, welcher, wenn a > b ist, um (a — b) Einheiten in positiver Richtung, wenn a < b, um (b — a) Einheiten in negativer Richtung vom Ausgangspunkt entfernt ist. Daraus folgt (+ a) + (— b) = + (a — b) oder = — (b — a), je nachdem a > b oder < b ist. Ähnlich beweist man die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

Folgerung. Der Wert einer Summe relativer Zahlen (algebraischen Summe) ist unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder, denn aus (44) folgt
$$(+a)+(-b)=(-b)+(+a).$$

Anmerkung. Da nach § 25 die nach beiden Seiten unendliche Zahlenreihe alle Eigenschaften der einseitigen Zahlenreihe besitzt, so ist zu erwarten, daß die aus jener abgeleiteten Gleichungen (43), (44) mit den aus der letzteren

Digitized by Google

im ersten Abschnitte über Summen und Differenzen abgeleiteten Sätzen sich in Einklang befinden. In der Tat ergeben sich unter Voraussetzung der Gleichung (42) mit Anwendung der Formeln (2), (7*), (8*), (9*) die Gleichungen:

$$a+(+b)+(+c)=a+b+c=a+(b+c)=a+(+(b+c)),$$
$$a+(-b)+(-c)=a-b-c=a-(b+c)=a+(-(b+c)),$$
$$a+(+b)+(-c)=a+b-c=a+(b-c)=a+(+(b-c)),$$
$$a+(-b)+(+c)=a-b+c=a-(b-c)=a+(-(b-c)),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten a in Abzug bringt, die obigen Gleichungen (43) und (44).

§ 27.

Lehrsatz. Jedes Aggregat von absoluten, durch (+) und (−) verbundenen Zahlen ist gleich einer Summe relativer Zahlen, in welcher die im Aggregat abzuziehenden Zahlen das Vorzeichen „−", die zu addierenden das Vorzeichen „+" erhalten.

Der Beweis ergibt sich in jedem Falle leicht durch wiederholte Anwendung der Formeln (43) und (44) oder (42). So ist:

$$a-b+c-d-e=a+(-b)+(+c)+(-d)+(-e). \quad (45)$$

Erklärung. In Übereinstimmung mit § 11, Erkl. heißen in jedem Polynom (a − b + c − d − e) die Summanden der dem Polynome gleichen Summe relativer Zahlen (a, (− b), (+ c), (− d), (− e)) die Glieder des Polynoms. Das erste Glied, welches kein Vorzeichen hat, ist als positiv zu betrachten, und ebenso kann man bei einer Summe relativer Zahlen das positive Vorzeichen des ersten Gliedes fortlassen.

Jedes Glied für sich heißt ein Monom, eine Verbindung von zwei Gliedern ein Binom.

In jedem Monom bildet der Buchstabenausdruck den Hauptfaktor; eine vor demselben als Faktor stehende, positive oder negative bestimmte Zahl heißt der Koeffizient, z. B.

$+\frac{3}{4}$ ist der Koeffizient von $\frac{3}{4}ad$, -2 der von $-2\frac{a+5d}{3a-7b}$.

Zwei Glieder eines Polynoms heißen gleichnamig, wenn sie denselben Hauptfaktor haben.

Anmerkung. Die Glieder eines Polynoms pflegt man lexikalisch und, wenn es möglich ist, nach steigenden oder fallenden Potenzen derselben Grundzahl zu ordnen; auch in jedem einzelnen Gliede stellt man die Faktoren in alphabetischer Ordnung zusammen.

$$7a^5x^2-12a^4x^3+\frac{3}{5}a^2x^5+ax^6.$$

Folgerung. Ein oder mehrere Polynome addiert man zu einer Zahl oder zu einem Polynome, indem man ihre einzelnen Glieder addiert und die

Digitized by Google

gleichnamigen Glieder durch Absondern des Hauptfaktors und Vereinigung der Koeffizienten zusammenfaßt.

$$\begin{aligned}(12a^4 - 8a^3b - 18a^2b^2) + (5\tfrac{3}{8}a^3b - a^2b^2 + 4\tfrac{1}{2}ab^3)\\ = 12a^4 - 8a^3b - 18a^2b^2\\ + \tfrac{4}{8}a^3b - a^2b^2 + \tfrac{8}{2}ab^3\\ \hline = 12a^4 - 2\tfrac{1}{8}a^3b - 19a^2b^2 + \tfrac{8}{2}ab^3.\end{aligned}$$

C. Subtraktion relativer Zahlen.

§ 28.

Erklärung. Eine relative Zahl von einer anderen subtrahieren heißt eine Zahl finden, welche zur ersteren addiert die letztere ergibt.

Lehrsatz. Subtrahiert man eine relative Zahl von einer anderen, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man zum Minuendus den Subtrahendus mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Beweis durch die Probe. Es ist

$$\left.\begin{aligned}(+a)-(+b)&=(+a)+(-b),\quad (-a)-(-b)=(-a)+(+b),\\ (+a)-(-b)&=(+a)+(+b),\quad (-a)-(+b)=(-a)+(-b),\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

denn wenn man zur rechten Seite jeder Gleichung den Subtrahendus der linken Seite addiert, erhält man den Minuendus.

Zusatz 1. $-(+b) = -b, \quad -(-b) = +b,$

denn es ist $a - (+b) = a + (-b); \quad a - (-b) = a + (+b).$

Bringt man auf beiden Seiten jeder Gleichung a in Abzug, so ergibt sich die Behauptung.

Zusatz 2. Ein Polynom subtrahiert man, indem man seine einzelnen Glieder subtrahiert, d. h. mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

$$\begin{aligned}(22a^3 - 11a^2b + 13ab^2 - 4b^3) - (10a^3 - 8a^2b - 7ab^2 + 6b^3)\\ = 22a^3 - 11a^2b + 13ab^2 - 4b^3\\ - 10a^3 + 8a^2b + 7ab^2 - 6b^3\\ \hline = 12a^3 - 3a^2b + 20ab^2 - 10b^3.\end{aligned}$$

D. Multiplikation relativer Zahlen.

§ 29.

Erklärung. Nach der Definition der Multiplikation ist unter Berücksichtigung der §§ 26 bis 28:

$$\begin{aligned}(+a)\cdot b &= (+a)+(+a)+(+a)+\cdots \text{ (b mal)} = +ab \quad (47)\\ (-a)\cdot b &= (-a)+(-a)+(-a)+\cdots \text{ (b mal)} = -ab.\end{aligned}$$

Läßt man auch hierfür das Vertauschungsgesetz gelten, so ist auch

$$b\cdot(+a) = +ab, \qquad b\cdot(-a) = -ab.$$

Digitized by Google

Nach dem Permanenzprinzip erweitert man in diesem Sinne den Begriff des Produktes und erklärt:

Eine absolute Zahl mit einer relativen Zahl multiplizieren heißt, die Zahl mit dem absoluten Wert der relativen Zahl multiplizieren und dem Produkt das Vorzeichen des Multiplikators geben.

Man darf den Ausdruck Produkt auf $b \cdot (+a)$ und $b \cdot (-a)$ anwenden, wenn man nachweist, daß die Rechnung mit denselben unter Anwendung der eben gegebenen Erklärung und der für Produkte geltenden Sätze zu richtigen Ergebnissen führt. In der Tat ist

1. $(a+b)\cdot(-c) = a\cdot(-c)+b\cdot(-c) = (-ac)+(-bc)$
$= -ac-bc = -(a+b)\cdot c,$
2. $(a-b)\cdot(-c) = a\cdot(-c)-b\cdot(-c) = (-ac)-(-bc)$
$= -ac+bc = -(a-b)\cdot c,$
3. $(ab)\cdot(-c) = a\cdot[b\cdot(-c)] = a\cdot[-bc] = -abc = -(ab)\cdot c,$
4. $\frac{a}{b}\cdot(-c) = \frac{a\cdot(-c)}{b} = \frac{-ac}{b} = -\frac{a}{b}\cdot c,$

wie sich ergibt, wenn man auf die linken Seiten der Gleichungen die obigen Erklärungen anwendet.

Lehrsatz 1. Multipliziert man zwei gleichsinnige Zahlen miteinander, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man dem Produkt ihrer absoluten Werte das Vorzeichen + gibt.

Behauptung. $(+a)\cdot(+b) = +ab;\quad (-a)\cdot(-b) = +ab.$ (48)

Beweis. $(+a)\cdot(+b) = +a\cdot(+b) = +(+ab) = +ab.$
$(-a)\cdot(-b) = -a\cdot(-b) = -(-ab) = +ab.$

Da die Erfassung des Satzes, daß das Produkt aus zwei negativen Zahlen positiv ist, erfahrungsmäßig große Schwierigkeiten bereitet, so soll dem obigen formalen Beweis noch eine Erläuterung hinzugefügt werden.

Behandelt man nämlich nach der Formel (16)

$$(a-b)\cdot(c-d) = ac-bc-ad+bd$$

zunächst das Produkt $(5-3)\cdot(7-4)$, so muß das Ergebnis 6 sein. Dies erhält man, wenn man zu den leicht verständlichen Produkten $5\cdot 7 - 3\cdot 7 - 5\cdot 4$, die zusammen -6 ergeben, $+3\cdot 4$ hinzufügt.

Nach derselben Regel behandelt man jetzt

$$(3-5)\cdot(4-7) = 3\cdot 4 - 5\cdot 4 - 3\cdot 7 + 5\cdot 7$$
$$= 12 - 20 - 21 + 35$$
$$(-2)\cdot(-3) = +6.$$

Lehrsatz 2. Multipliziert man zwei entgegengesetzte Zahlen miteinander, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man dem Produkte ihrer absoluten Werte das Vorzeichen (—) gibt.

Digitized by Google

Behauptung. $(+a)\cdot(-b)=-ab$; $(-a)\cdot(+b)=-ab$. (49)

Beweis. $(+a)\cdot(-b)=+a\cdot(-b)=+(-ab)=-ab.$

$(-a)\cdot(+b)=-a\cdot(+b)=-ab.$

Zur Erläuterung ersetzen wir die Zahlen $+2$ und $+3$ wieder durch die Differenzen $(5-3)$ und $(7-4)$, die Zahlen -2 und -3 durch die uneigentlichen Differenzen $(3-5)$ und $(4-7)$, denen durch die Einführung der negativen Zahlen Bürgerrecht verliehen ist. Es ist

$$(+2)\cdot(-3)=(5-3)\cdot(4-7)=5\cdot4-3\cdot4-5\cdot7+3\cdot7$$
$$=20-12-35+21=41-47=-6,$$
$$(-2)\cdot(+3)=(3-5)\cdot(7-4)=21-35-12+20$$
$$=41-47=-6.$$

Zusatz 1. Um zwei Monome miteinander zu multiplizieren, setzt man vor das Produkt der Hauptfaktoren das der Koeffizienten als Faktor.

$$(-\tfrac{2}{3}a^3b)\cdot(+6a^2b^2d^3)=-4a^5b^3d^3.$$

Zusatz 2. Um ein Polynom mit einem Monome zu multiplizieren, multipliziert man jedes Glied des Polynoms mit dem Monome und addiert die Produkte.

$$(5x^2y-\tfrac{3}{4}xy^2-\tfrac{5}{2}y^3)\cdot(-\tfrac{4}{5}x^3y^2)=-4x^5y^3+\tfrac{3}{5}x^4y^4+2x^3y^5.$$

Zusatz 3. Um zwei Polynome miteinander zu multiplizieren, multipliziert man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen und addiert die erhaltenen Produkte.

$$(6a^3-3a^2b+8b^3)\cdot(4a^2+2ab-3b^2)$$
$$=24a^5-12a^4b+32a^2b^3$$
$$+12a^4b\qquad-6a^3b^2+16ab^4$$
$$+9a^2b^3-18a^3b^2\qquad-24b^5$$
$$=24a^5\qquad+41a^2b^3-24a^3b^2+16ab^4-24b^5$$
$$=24a^5-24a^3b^2+41a^2b^3+16ab^4-24b^5.$$

Zusatz 4. Ein Polynom, dessen Glieder einen Faktor gemeinsam haben, läßt sich durch Absondern desselben als ein Produkt darstellen, welches aus jenem gemeinschaftlichen Faktor und der Summe der besonderen Faktoren besteht.

$$15a^4b-6a^2b^3+25a^2x^3-10b^2x^3=3a^2b(5a^2-2b^2)+5x^3(5a^2-2b^2)$$
$$=(3a^2b+5x^3)\cdot(5a^2-2b^2).$$

Digitized by Google

Zusatz 5. Das Produkt mehrerer Monome ist positiv oder negativ, je nachdem die negativen Faktoren in gerader oder ungerader Zahl vorhanden sind.

$$(+3a)\cdot(-2ab)\cdot(+3ac)\cdot(-4a^2b)\cdot(-5a^2c^3)$$
$$=-360a^7b^2c^4.$$

Folgerung. Alle Potenzen einer relativen Zahl mit geraden Exponenten sind positiv; die Potenzen mit ungeraden Exponenten sind positiv oder negativ, je nachdem die Grundzahl positiv oder negativ ist.

E. Division relativer Zahlen.

§ 30.

Erklärung. Unter dem Quotienten aus zwei relativen Zahlen versteht man die Zahl, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividendus gibt.

Lehrsatz 1. Dividiert man eine relative Zahl durch eine gleichsinnige Zahl, so ergibt sich derselbe Wert, wie wenn man dem Quotienten ihrer absoluten Werte das Vorzeichen (+) gibt.

Behauptung. $(+a):(+b)=+\frac{a}{b}$, $(-a):(-b)=+\frac{a}{b}$. (50)

Beweis. Multipliziert man die rechte Seite jeder Gleichung mit dem Divisor der linken Seite, so ergibt sich der Dividendus der linken Seite, im ersten Falle + a, im zweiten — a.

Lehrsatz 2. Dividiert man eine relative Zahl durch eine entgegengesetzte Zahl, so ergibt sich derselbe Wert, wie wenn man dem Quotienten ihrer absoluten Werte das Vorzeichen (—) gibt.

Behauptung. $(+a):(-b)=-\frac{a}{b}$, $(-a):(+b)=-\frac{a}{b}$. (51)

Beweis. Multipliziert man die rechte Seite jeder Gleichung mit dem Divisor der linken Seite, so ergibt sich der Dividendus der linken Seite.

Zusatz 1. Um ein Monom durch ein Monom zu dividieren, multipliziert man den Quotienten der Hauptfaktoren mit dem Quotienten der Koeffizienten.

$$(-12a^7b^4):(+\tfrac{3}{5}a^2b)=-20\frac{a^7b^4}{a^2b}=-20a^5b^3.$$

Zusatz 2. Um ein Polynom durch ein Monom zu dividieren, dividiert man jedes Glied des Polynoms durch das Monom und addiert die erhaltenen Quotienten.

$$(20a^3b-15a^2b^2+30ab^3):5ab=4a^2-3ab+6b^2.$$

Digitized by Google

Zusatz 3. Um ein Polynom durch ein anderes zu dividieren, ordnet man beide nach demselben Gesetze, dividiert das erste Glied des Dividendus (D) durch das erste Glied des Divisors (d), multipliziert den Quotienten (q_1) mit dem ganzen Divisor, zieht das Produkt vom Dividendus ab, dividiert hierauf das erste Glied des geordneten Restes durch das erste Glied des Divisors, multipliziert den Quotienten (q_2) mit dem Divisor, zieht das Produkt vom Reste ab, dividiert hierauf das erste Glied des neugeordneten Restes durch das erste Glied des Divisors usw. Dann ist, wenn die Division aufgeht, $Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ der gesuchte Quotient.

Beispiel. Quotient: $\frac{1}{3}a^4 - 4a^3b + 9a^2b^2$

$$\begin{array}{l} (\frac{1}{81}a^8 - 8a^6b^2 + 81a^4b^4) : (\frac{1}{3}a^4 + 4a^3b + 9a^2b^2) \\ \underline{\frac{1}{81}a^8 + 4a^6b^2 \qquad\qquad + \frac{16}{9}a^7b} \\ -\frac{16}{9}a^7b - 12a^6b^2 + 81a^4b^4 \\ \underline{-\frac{16}{9}a^7b - 16a^6b^2 \qquad\qquad - 36a^5b^3} \\ + 4a^6b^2 + 36a^5b^3 + 81a^4b^4 \\ \underline{+ 4a^6b^2 + 36a^5b^3 + 81a^4b^4} \end{array}$$

Beweis. $D - (q_1 d + q_2 d + q_3 d + \cdots) = 0$ oder

$D - d(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots) = 0, \qquad D = d(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots),$

$$\frac{D}{d} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = Q.$$

Anmerkung. Geht die Division nach Herunternahme aller Glieder des Dividendus nicht auf, so kann man entweder den Rest als Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist, zum Quotienten hinzufügen oder die Rechnung fortsetzen. Man erhält im letzteren Falle eine endlose Reihe von Gliedern.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Zusatz 4. Abgekürzte Division.

$$(x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 12x + 45) : (x - 3) = x^3 - 3x^2 - x - 15$$

$$\begin{array}{l} \pm x^4 \mp 3x^3 \\ \underline{\qquad -3x^3} \\ \mp 3x^3 \pm 9x^2 \\ \underline{\qquad\qquad -x^2} \\ \mp x^2 \pm 3x \\ \underline{\qquad\qquad\quad -15x} \\ \mp 15x \pm 45 \\ \underline{\qquad\qquad\quad 0} \end{array}$$

Digitized by Google

Da die ersten Glieder der Teilprodukte bei der Subtraktion stets den Rest 0 lassen, können sie fortbleiben, die zweiten Glieder aber können **addiert** werden, wenn man den Teilquotienten gleich mit $+3$ multipliziert. Dies ergibt folgende Form:

$$\begin{array}{l} (x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 12x + 45) : (x - 3) = x^3 - 3x^2 - x - 15 \\ \quad +3x^3 - 9x^2 - 3x - 45 \quad (+3) \\ \quad -3x^3 - x - 15x \quad 0 \end{array}$$

Endlich kann man auch noch die Potenzen von x fortlassen und bloß mit den Koeffizienten rechnen

$$\begin{array}{rl} & (x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 12x + 45) : (x - 3) \\ & 1 \quad -6 \quad +8 \quad -12 \quad +45 \\ +3) & 0 \quad +3 \quad -9 \quad -3 \quad -45 \\ \hline & 1 \quad -3 \quad -1 \quad -15 \quad 0 \end{array}$$

Resultat: $x^3 - 3x^2 - 1x - 15$

Man spricht $1 \cdot 3$ ist $+3$ -6 ist $-3 \cdot 3$ ist -9 $+8$ ist -1 usw. Dies empfiehlt sich besonders, wenn dasselbe Polynom durch mehrere Binome dividiert werden soll; z. B. $x^5 + 2x^4 - 32x^3 - 15x^2 + 158x + 120$ durch $(x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$.

$$\begin{array}{rl} & 1 \quad +2 \quad -32 \quad -15 \quad +158 \quad +120 \\ +3) & \quad +3 \quad +15 \quad -51 \quad -198 \quad -120 \\ \hline & 1 \quad +5 \quad -17 \quad -66 \quad -40 \\ +4) & \quad +4 \quad +36 \quad +76 \quad +40 \\ \hline & 1 \quad +9 \quad +19 \quad +10 \\ -2) & \quad -2 \quad -14 \quad -10 \\ \hline & 1 \quad +7 \quad +5 \end{array}$$

Quotient: $x^2 + 7x + 5$.

Ergibt das letzte Glied nicht Null, so geht die Division nicht auf, z. B. wenn man das obige Polynom durch $(x - 2)$ dividiert.

$$\begin{array}{rl} & 1 \quad +2 \quad -32 \quad -15 \quad +158 \quad +120 \\ +2) & \quad +2 \quad +8 \quad -48 \quad -126 \quad +64 \\ \hline & 1 \quad +4 \quad -24 \quad -63 \quad +32 \quad +184 \end{array}$$

Quotient: $x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 63x + 32 + \frac{184}{x - 2}$.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Anwendungen der vier Grundrechnungsarten.

1. Kapitel. Die vier Spezies mit dekadischen Zahlen.

§ 31.

Die Regeln über die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division dekadischer Zahlen ergeben sich aus den über das Rechnen mit Polynomen aufgestellten Regeln unter Beachtung folgender Sätze:

a. Jede dekadische Zahl kann als ein nach fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom dargestellt werden.

$$8506 = 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6.$$

b. Jedes Produkt, dessen Hauptfaktor eine Potenz von 10, und dessen Koeffizient größer als 10 ist, läßt sich in eine Summe von zwei oder mehreren Produkten verwandeln, welche außer der Potenz des Hauptfaktors die nächst höheren Potenzen von 10 enthalten (Zurückführen auf höhere Potenzen von 10).

$$36 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3; \quad 823 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3.$$

c. Umgekehrt läßt sich jede nach fallenden Potenzen von 10 geordnete Summe in ein Produkt verwandeln, dessen Hauptfaktor die niedrigste der vorhandenen Potenzen von 10 ist (Absondern der niedrigsten Potenz von 10).

$$4 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 403 \cdot 10^4; \quad 8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 = 89 \cdot 10^4.$$

Die Regeln für die Addition und Subtraktion ergeben sich unter Anwendung der Sätze a und b sofort nach dem Ordnen der Polynome.

$$\begin{array}{r} 8436 + 836 + 2089 = \\ 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \\ + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \\ + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \\ \hline 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \\ = 11361. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 706 - 485 = \\ 10 \cdot 10^1 \\ 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \\ 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \\ \hline 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \\ = 221 \end{array}$$

Bei der Subtraktion kann auch die Definition der Differenz als der Zahl, welche zum Subtrahendus zu addieren ist, um den Minuendus zu erhalten, benutzt werden.

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 3 & 2 \\ 3_1 & 8_1 & 9_1 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 3 & 5 \end{array}$$

sprich: 7 bis 12 ist 5
10 bis 13 ist 3
9 bis 14 ist 5
4 bis 6 ist 2.

Bei diesem, österreichische Subtraktionsmethode genannten Verfahren benutzt man den Satz, daß man den Subtrahendus vergrößern kann, statt

Digitized by Google

den Minuendus zu verkleinern. Es ist ja $(a - m) - b = a - (b + m)$. Bei dem alten Verfahren „borgte" man einen Zehner von der 3, bei dem österreichischen addiert man einen Zehner zu der 9.

§ 32.

Die Multiplikation und Division dekadischer Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt. Schreibt man z für 10, so ist

$$\begin{array}{r} 729 \cdot 34 \\ \hline 2187 \\ 2916 \\ \hline 24786 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (7z^2 + 2z + 9) \cdot (3z + 4) \\ \hline +21z^2 + 6z^2 + 27z \\ +28z^2 + 8z + 36 \\ \hline 21z^3 + 34z^2 + 35z + 36 \\ 2z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 8z + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8862 : 211 = 42 \\ 844 \\ \hline 422 \\ 422 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (8z^3 + 8z^2 + 6z + 2) : (2z^2 + 1z + 1) = 4z + 2 \\ \underline{8z^3 + 4z^2 + 4z} \\ \quad 4z^2 + 2z + 2 \\ \quad \underline{4z^2 + 2z + 2} \\ \quad\quad 0 \end{array}$$

Als praktisch kann diese Zerlegung allenfalls bei Ausdrücken gelten, welche die Formeln (17), (18), (19) anzuwenden gestatten.

$$37^2 = (3z + 7)^2 = 9z^2 + 42z + 49 = 949 + 420 = 1369$$
$$(39)^2 = (4z - 1)^2 = 16z^2 - 8z + 1 = 1601 - 80 = 1521$$
$$42 \cdot 38 = (4z + 2)(4z - 2) = 16z^2 - 4 = 1596$$
$$1206 \cdot 1194 = (12z^2 + 6)(12z^2 - 6) = 144z^4 - 36 = 143964.$$

---

2. Kapitel. Von den Dezimalbrüchen.

§ 33.

Erklärung. Ein Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl, und dessen Nenner eine dekadische Einheit (Potenz von 10) ist. Ein Dezimalbruch ist ein echter oder unechter, je nachdem der Zähler kleiner oder größer ist als der Nenner.

Lehrsatz 1. Jeder Dezimalbruch läßt sich als eine Summe von Dezimalbrüchen darstellen, deren Nenner die aufeinander folgenden Potenzen von 10 sind.

$$547{,}3086 = 547 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{6}{10000}.$$

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Wenn man in einem Dezimalbruche das Komma 1, 2, 3 ... Stellen nach rechts oder links verschiebt, so wird er dadurch mit 10, 100, 1000 ... multipliziert bzw. dividiert.

$$3{,}728 \cdot 100 = \frac{3728}{10} = 372{,}8; \quad 3{,}728 : 100 = \frac{3728}{100000} = 0{,}03728.$$

Zusatz. Von einem Dezimalbruche erhält man einen Näherungswert, wenn man von rechts her Stellen wegläßt. Ist der Zifferwert der ersten vernachlässigten Stelle $\geqq 5$, so erhöht man den der letzten gebliebenen Stelle um 1. Der begangene Fehler beträgt höchstens eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle.

§ 34.

Die Regeln über Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen werden als bekannt vorausgesetzt. Sie stehen in Übereinstimmung mit den für Polynome geltenden Regeln.

Das Produkt hat so viele Dezimalstellen wie die Faktoren zusammengenommen.

Statt durch einen Dezimalbruch zu dividieren, kann man durch die aus denselben Ziffern gebildete ganze Zahl dividieren, wenn man den Dividendus entsprechend erweitert.

$$\frac{23}{0{,}57} = \frac{23 \cdot 100}{0{,}57 \cdot 100} = \frac{2300}{57} = 2300 : 57.$$

$$\frac{2{,}349}{0{,}57} = \frac{2{,}349 \cdot 100}{0{,}57 \cdot 100} = \frac{234{,}9}{57} = 234{,}9 : 57.$$

Praktisch wird die Regel gewöhnlich ausgesprochen: Schiebe das Komma im Divisor ans Ende und im Dividendus um ebensoviel Stellen nach rechts.

Bricht man die Division an einer Stelle ab, so muß man, wenn der letzte Rest so groß oder größer ist als die Hälfte des Divisors, die letzte Dezimalziffer des Quotienten um 1 erhöhen. Der Fehler beträgt dann höchstens eine halbe Einheit der letzten berechneten Stelle.

§ 35.

Abgekürzte Multiplikation. Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich bekannt ist, ist jeder Dezimalbruch als eine abgekürzte Zahl zu betrachten, die letzte Ziffer ist also ungenau, die rechts von einem Ergebnis der letzten Ziffer stehenden Ziffern zu berechnen hat also keinen Sinn. Aus diesem Grunde kürzt man die Multiplikation ab. Um bei Bestimmung des Kommas des Produkts keine Schwierigkeiten zu haben, wählt man die kürzere Zahl zum Multiplikator, rückt in ihr das Komma hinter die erste von Null verschiedene Ziffer und im Multiplikandus um ebensoviel Stellen in entgegengesetzter Richtung.

Digitized by Google

Es ist ja

$$37 \cdot 0{,}57 = 0{,}57 \cdot 37 = 0{,}57 \cdot 10 \cdot \frac{37}{10} = 5{,}7 \cdot 3{,}7$$

$$0{,}5497 \cdot 123 = 0{,}5497 \cdot 100 \cdot \frac{123}{100} = 54{,}97 \cdot 1{,}23$$

$$\begin{array}{r} 54{,}\dot{9}\dot{7} \cdot \dot{1}{,}\dot{2}\dot{3} \\ \hline 54{,}97 \\ 10\,99 \\ 1\,65 \\ \hline 67{,}61 \end{array}$$

Rechenanweisung: $54{,}97 \cdot 1$, Komma wie im Multiplikandus, Punkt über 1 und 7, $7 \cdot 2 = 14$, 4 fortgelassen, 1 zu $549 \cdot 2$ addiert, Punkt über 2 und 9, $9 \cdot 3 = 27$, 3 zu $54 \cdot 3$ addiert, Addition der Teilprodukte.

Abgekürzte Division. $0{,}8064 : 5{,}1072$.

$$\begin{array}{l} 8064 : 5\dot{1}0\dot{7}\dot{2} = 0{,}1579 \\ \underline{5107} \\ 2957 \\ \underline{2554} \\ 403 \\ \underline{357} \\ 46 \end{array}$$

Rechenanweisung: 8 tausend durch 51 tausend ist 0 Komma, Punkt über 2; 8 tausend durch 5 tausend ist 1, 1×2 wird fortgelassen, $1 \cdot 5107$ subtrahiert, Punkt über 7; 29 hundert durch 5 hundert ist 5, $5 \times 7 = 35$, addiere 4 zu $510 \cdot 5$, subtrahiere 2554, Punkt über 0; $403 : 51 = 7$ uff.

§ 36.

Man verwandelt einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch, indem man die im Bruche angedeutete Division des Zählers durch den Nenner ausführt. Geht die Division, hinreichend fortgesetzt, auf, so erhält man einen endlichen, geht sie nicht auf, einen unendlichen Dezimalbruch.

Bei der Verwandlung eines vollständig gehobenen Bruches in einen Dezimalbruch erhält man einen endlichen Dezimalbruch, wenn der Nenner nur 2 und 5 und ihre Potenzen als Faktoren enthält.

Geht die Division nicht auf, so muß einer der früheren Reste und von da ab die frühere Rechnung unaufhörlich wiederkehren.

$$27 : 44 = 0{,}613636\ldots; \qquad 17 : 36 = 0{,}47222\ldots$$

Ein solcher Dezimalbruch heißt ein periodischer Dezimalbruch. Die Reihe Ziffern, welche beständig wiederkehrt, heißt die Periode. Die Dezimalbrüche heißen rein periodisch, wenn die Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt, sonst gemischt periodisch. Die Reihe Ziffern, welche aus

Digitized by Google

den der Periode vorangehenden (den Vorstellen) und den die Periode bildenden Ziffern besteht, heißt die gemischte Periode. Die Periode wird durch einen horizontalen Strich über ihr angedeutet:

$$0{,}47222 = 0{,}472\ldots; \quad 0{,}613636\ldots = 0{,}61\overline{36}\ldots$$

§ 37.

1. Einen endlichen Dezimalbruch verwandelt man in einen gemeinen Bruch, indem man ihn als solchen schreibt, und wenn es möglich ist, hebt.

$$0{,}725 = \frac{725}{1000} = \frac{29}{40}; \quad 17{,}0768 = 17\frac{768}{10000} = 17\frac{48}{625}.$$

2. Einen rein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gemeinen Bruch, indem man als Zähler die Ziffern der Periode und als Nenner soviel Neunen schreibt, als die Periode Ziffern hat.

Behauptung. $0{,}\overline{702} = \frac{702}{999}$.

Beweis. Bezeichnet man den gesuchten Bruch mit x, so ist:

$$x = 0{,}702\,702\,702\ldots\ldots,$$

also, wenn man mit 1000 multipliziert:

$$1000\,x = 702{,}702\,702\,702\ldots\ldots,$$

folglich, wenn man die obere Gleichung von der unteren abzieht,

$$999\,x = 702, \qquad x = \frac{702}{999} = \frac{26}{37}.$$

3. Die Verwandlung eines gemischt periodischen Dezimalbruches zeigt das Beispiel:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}70666\ldots \\ 1000\,x &= 706{,}666\ldots \\ 100\,x &= 70{,}666\ldots \\ \hline 900\,x &= 636 \\ x &= \frac{636}{900} = \frac{53}{75}. \end{aligned}$$

3. Kapitel. Von der Teilbarkeit ganzer Zahlen.

§ 38.

Erklärungen. Eine Zahl, welche in einer anderen ohne Rest enthalten ist, heißt ein Maß oder Teiler dieser Zahl und die letztere ein Vielfaches (Dividuus) der ersteren. Eine Zahl, welche in zwei oder mehreren anderen ohne Rest enthalten ist, heißt ihr gemeinschaftliches Maß; das größte gemeinschaftliche Maß (abgekürzt g. g. M.) mehrerer Zahlen ist die größte Zahl, welche in jeder derselben aufgeht.

Eine Zahl, in welcher andere Zahlen ohne Rest enthalten sind, wird ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen genannt. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (abgekürzt k. g. V.) mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, in welche jede derselben aufgeht.

Digitized by Google

Eine Zahl, welche nur Eins und sich selbst zum Maße hat, wird eine **Primzahl** genannt (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 usw.). Die anderen Zahlen heißen **zusammengesetzte** Zahlen. Die Vielfachen von 2 heißen **gerade** Zahlen, die anderen **ungerade** Zahlen. Die allgemeine Form der ersteren ist $2n$, die der letzteren $2n \pm 1$, wobei n den Wert jeder ganzen Zahl annehmen kann. Die einfachen Zahlen, in welche jede zusammengesetzte Zahl zerlegt werden kann, heißen ihre Primfaktoren. Zahlen von der Form $6n \pm 1$ sind sehr oft prim.

Zwei Zahlen, welche außer der Eins kein gemeinschaftliches Maß haben, nennt man teilerfremde Zahlen.

Lehrsatz 1. Jedes Maß (m) einer Zahl a ist ein Maß jedes Vielfachen (na) der Zahl.

Beweis. Da nach Voraussetzung $\frac{a}{m}$ eine ganze Zahl ist, so muß auch $n \cdot \frac{a}{m} = \frac{na}{m}$ eine ganze Zahl sein, d. h. m ist ein Maß von na.

Lehrsatz 2. Jedes gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen (a und b) ist ein Maß der Summe oder Differenz beider Zahlen.

Beweis. Da nach Voraussetzung $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so muß auch $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$ eine ganze Zahl sein, d. h. m ist ein Maß von $a \pm b$.

Erklärung. Ist eine Zahl a nicht ohne Rest durch eine Zahl b teilbar, so gibt es immer ein solches Vielfache qb von b, daß $qb < a$, dagegen $(q+1)b > a$ ist; dann sagt man: b ist in a $q$mal enthalten, $a - bq = r$ ist der bei der Division von a und b entstehende **Rest**, und a läßt mit b den Rest r.

Lehrsatz 3. Jedes gemeinschaftliche Maß von Dividendus und Divisor ist auch ein Maß des Restes; jedes gemeinschaftliche Maß von Divisor und Rest ist auch ein Maß des Dividendus.

Beweis. Bezeichnet a den Dividendus, b den Divisor, r den Rest, so ist $a - bq = r$. Wenn nun eine Zahl in a und b, also auch in bq aufgeht, so muß sie auch in $a - bq$, d. i. in r aufgehen.

Lehrsatz 4. Die Summe mehrerer Zahlen ist durch eine Zahl teilbar, wenn die Summe der Reste, welche die einzelnen Summanden bei der Division durch die Zahl lassen, durch sie teilbar ist.

Beweis. Lassen a_1, a_2, a_3.. bei der Division durch die Zahl m die Reste r_1, r_2, r_3.., und bezeichnen q_1, q_2, q_3.. die dabei sich ergebenden Quotienten, so ist:

$$a_1 = mq_1 + r_1, \qquad a_2 = mq_2 + r_2, \qquad a_3 = mq_3 + r_3 \ldots,$$

folglich

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = m(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots) + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots,$$

und da das erste Glied rechts durch m teilbar ist, so muß die ganze rechte Seite, also auch die Summe auf der linken Seite durch m teilbar sein, wenn m ein Maß von $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots$ ist.

Digitized by Google

§ 39.

Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß (g. g. M.) zweier Zahlen a und b zu finden.

Auflösung. Man dividiere die größere Zahl a durch b, den Divisor b durch den bei der ersten Division entstandenen Rest r_1, den Rest r_1 durch den bei der zweiten Division entstandenen Rest r_2, hierauf r_2 durch den bei der dritten Division entstandenen Rest r_3 usw., bis die Division aufgeht; dann ist der letzte Rest das g. g. M. beider Zahlen.

Beispiel.

943	299	3
897	276	6
46	23	2
46		

Beweis. Aus den Divisionen ergeben sich die Gleichungen:

$$a = bq + r_1, \quad b = r_1q_1 + r_2, \quad r_1 = r_2q_2 + r_3, \quad r_2 = r_3q_3,$$

folglich

$$a - bq = r_1, \quad b - r_1q_1 = r_2, \quad r_1 - r_2q_2 = r_3, \quad r_2 = r_3q_3.$$

Nun geht r_3 in r_3q_3 auf, also auch in r_2 und in r_2q_2;
r_3 geht in r_2q_2 und r_3 auf, also auch in r_1 und r_1q_1;
r_3 geht in r_1q_1 und r_2 auf, also auch in b und bq;
r_3 geht in bq und in r_1 auf, also auch in a;
folglich ist r_3 ein gemeinschaftliches Maß von a und b.

Angenommen, m sei ein anderes Maß von a und b, so geht m auch in bq, also in a — bq oder in r_1 auf, m geht in r_1q_1 und in b auf, also auch in r_2 und in r_2q_2; m geht in r_2q_2 und in r_1 auf, also auch in r_3; folglich ist $m < r_3$, mithin ist r_3 das g. g. M.

Zugleich leuchtet ein, daß in dem g. g. M. zweier Zahlen jedes andere ohne Rest enthalten ist.

Zusatz. Zwei Zahlen sind teilerfremd, wenn ihr g. g. M., also der letzte Rest gleich Eins ist.

§ 40.

Lehrsatz 1. Jedes Maß m eines Produktes ab, welches zu dem einen Faktor b teilerfremd ist, ist ein Maß des anderen Faktors a.

Beweis. Weil b und m teilerfremd sind, so ist:

$$b - mq = r_1, \quad m - r_1q_1 = r_2, \quad \ldots\ldots r_{n-1} - r_nq_n = 1,$$

folglich $ab - amq = ar_1$, $am - ar_1q_1 = ar_2$, $\ldots\ldots ar_{n-1} - ar_nq_n = a$.

Da nun m nach Voraussetzung ein Maß von ab und amq ist, so ist es auch ein Maß von ar_1, folglich auch von ar_2, ar_3, .. ar_n, folglich auch von a.

Zusatz 1. Jede Primzahl m, welche ein Maß eines Produktes ab ist, ist ein Maß eines der Faktoren.

Zusatz 2. Wenn eine Zahl c mit zwei Zahlen a und b teilerfremd ist, so ist sie auch mit ihrem Produkte teilerfremd.

Digitized by Google

Folgerung. Wenn a und b teilerfremd sind, so ist auch jede Potenz von a mit jeder Potenz von b teilerfremd.

Lehrsatz 2. Jede Zahl läßt sich nur auf eine Art als ein Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis. Die Zahl z sei gleich dem Produkte der Primzahlen abcd...; wäre außer ihnen auch die Primzahl α ein Maß von z, so müßte $\frac{abcd..}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein, folglich ein Faktor, etwa a durch α teilbar, also entweder $a = q\alpha$, somit a keine Primzahl, oder $a = \alpha$ sein, was beides der Voraussetzung widerspricht.

Aufgabe. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

Auflösung. Man dividiere die Zahl und die dadurch erhaltenen Quotienten, so oft als es ohne Rest möglich ist, durch 2, dann der Reihe nach durch die folgenden Primzahlen und fährt so fort bis zu derjenigen einschließlich, deren Quadrat noch nicht größer ist als der letzte Quotient. Ist derselbe durch sie nicht teilbar, so ist er selbst eine Primzahl.

Beispiel.

24220	2
12110	2
6055	5
1211	7
173	173

In 173 gehen 7, 11, 13 nicht auf, $17^2 > 173$, also braucht man die Division durch 17 nicht zu versuchen. 173 ist selbst eine Primzahl, denn wenn 173 einen Faktor gleich oder größer als 17 hätte, so müßte der andere Faktor < 17, also bereits gefunden sein, mithin ist

$$24220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 173.$$

Aufgabe. Das g. g. M. und das k. g. V. mehrerer Zahlen zu finden.

Auflösung. 1. Man zerlege jede Zahl in ihre Primfaktoren, vereinige die gleichen Faktoren zu Potenzen, so ist das Produkt der in allen Zahlen vorkommenden Primfaktoren in ihren niedrigsten Exponenten das g. g. M.

Beispiel. $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Das g. g. M. ist: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$.

2. Man zerlege jede Zahl in ihre Primfaktoren, vereinige die gleichen Faktoren zu Potenzen, so ist das Produkt aller vorkommenden Primfaktoren mit ihren höchsten Exponenten das k. g. V.

Beispiel. $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Das k. g. V. ist: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600$.

§ 41.

Erklärung. Nach § 31 ist jede dekadische Zahl gleich einem nach fallenden Potenzen von 10 geordneten Polynome, also

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Digitized by Google

Unter der Quersumme einer Zahl versteht man die Summe der Koeffizienten der Potenzen von 10 oder die Summe der Ziffern ohne Rücksicht auf ihre Stellenwerte.

Unter der Querdifferenz versteht man die Summe der Ziffern an gerader Stelle, vermindert um die Summe der Ziffern an ungerader Stelle, z. B. 7496 Q.D. $7+9-(4+6)=6$.

Lehrsatz 1. Eine Zahl ist durch 2 oder 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer 0 oder durch 2 beziehungsweise 5 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 4 oder 25 teilbar, wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind, oder die aus ihnen gebildete Zahl durch 4 bzw. 25 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 8 oder 125 teilbar, wenn die drei letzten Ziffern Nullen sind, oder die aus ihnen gebildete Zahl durch 8 bzw. 125 teilbar ist.

Beweis. Stellt man die Zahl z als Polynom dar, setzt also

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

so kann man

1. 10^1 absondern

$$z = 10(a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1) + a_0.$$

Das erste Glied ist durch 2 und 5 teilbar, weil ein Faktor (10) durch 2 und 5 teilbar ist. Wenn also die letzte Ziffer a_0 auch durch 2 und 5 teilbar ist, so ist 2 durch diese Zahlen teilbar.

2. 10^2 absondern

$$z = 10^2(a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2) + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Das erste Glied ist durch 4 und 25 teilbar, weil der erste Faktor $10^2 = 100$ durch 4 und 25 teilbar ist. Wenn also die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl $a_1 \cdot 10 + a_0$ auch durch 4 und 25 teilbar ist, so ist auch durch diese Zahlen teilbar.

3. Ähnlich ist der Beweis für die Teilbarkeit durch 8 und 125.

Lehrsatz 2. Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

Beweis. Setzt man wieder $z = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$ und dividiert ein beliebiges Glied $a_k \cdot 10^k$ durch 9, so läßt dies den Rest a_k. Denn es ist $a_k \cdot 10^k : 9 = \frac{a_k(10^k - 1) + a_k}{9} = x a_k \cdot \frac{10^k - 1}{9} + \frac{a_k}{9}$. Da $10^k - 1$ stets durch 9 teilbar ist, bleibt bei der Division der Rest a_k. Die Summe der Reste (§ 38, Lehrs. 4) ist also gleich der Summe der Ziffern, d. h. der Quersumme. Ist diese durch 9 teilbar, so ist auch die Zahl durch 9 teilbar. Entsprechend ist der Beweis für 3.

Digitized by Google

Zusatz 1. Multipliziert man die Neunerreste der Quersummen der Faktoren eines Produktes miteinander, so erhält man den Neunerrest der Quersumme des Produkts. (Neunerprobe.)

$$5083 \cdot 728 = 37000424,$$

QS: 16, 17, 20; NR 7, 8, 2; Probe $7 \cdot 8 = 56 = 9 \cdot 6 + 2$.

Beweis s. Zusatz 3, Beispiel.

Zusatz 2. Alle geraden Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 6 teilbar.

Lehrsatz 3. Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar oder Null ist.

Beweis. $a_2 \cdot 10^2 : 11 = a_2 (99 + 1) : 11 = 9 a_2 + \frac{a_2}{11}$;

$$a_4 \cdot 10^4 : 11 = a_4 (9999 + 1) : 11 = 99 a_4 + \frac{a_4}{11}.$$

Das erste, dritte, fünfte Glied läßt also bei der Division durch 11 die Reste a_0, a_2, a_4.

$$a_1 \cdot 10^1 : 11 = a_1 (11 - 1) : 11 = a_1 - \frac{a_1}{11};$$

$$a_3 \cdot 10^3 : 11 = a_3 (1001 - 1) : 11 = 91 \cdot a_3 - \frac{a_3}{11} \text{ usf.}$$

Das 2., 4., 6.... Glied lassen zusammen die Reste $-a_1 - a_3 - a_5 \ldots$ Demnach wird die Zahl durch 11 teilbar sein, wenn $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots - (a_1 + a_2 + a_5 + \cdots)$ durch 11 teilbar ist, und letzteres ist auch der Fall, wenn die Differenz 0 oder ± 11 ist.

Zusatz 3. Ist $a = p \cdot c + r$ und $b = q \cdot c + r$, d. h. lassen a und b bei der Division durch c beide den gleichen Rest r, so sagt man a kongruent b modulo c und schreibt dies nach Gauß (1801)

$$a \equiv b \pmod{c},$$

woraus stets folgt $\frac{a - b}{c} = g$, wo g eine ganze Zahl ist. Besonders ist

$$a \equiv r \pmod{c} \text{ und } b \equiv r \pmod{c}.$$

Für die Kongruenzen gelten entsprechend den Sätzen § 8, 1, § 10, 1, § 13, Lehrs., wenn $a \equiv b \pmod{c}$ und $k \equiv l \pmod{c}$ ist:

$a + k \equiv b + l \pmod{c}$, $a - k \equiv b - l \pmod{c}$, $a \cdot k \equiv b \cdot l \pmod{c}$,

und da mc stets kongruent nc modulo c, besonders

$$a \pm mc \equiv b \pm nc \pmod{c}.$$

Beispiel. $5083 \equiv 16 \pmod{9}$, $728 \equiv 17 \pmod{9}$,

$5083 \cdot 728 \equiv 16 \cdot 17 \pmod{9}$, $16 \equiv 7 \pmod{9}$, $17 \equiv 8 \pmod{9}$,

$16 \cdot 17 \equiv 7 \cdot 8 = 56 \equiv 2 \pmod{9}$.

Digitized by Google

4. Kapitel. Von den Proportionen.

§ 42.

Erklärung. Unter dem Verhältnisse (ratio, λόγος) einer Zahl a zu einer Zahl b versteht man die Zahl, welche angibt, wie viel mal die letztere b in der ersteren a enthalten ist.

Der Wert des Verhältnisses wird daher durch den Quotienten beider Zahlen bestimmt. Sind die Zahlen a und b, so wird das Verhältnis durch $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ dargestellt. a und b heißen die Glieder des Verhältnisses, a das Vorderglied, b sein Hinterglied; der möglichst einfach ausgedrückte Wert des Verhältnisses heißt sein Quotient (weniger gut: sein Exponent).

Folgerung. Ein Verhältnis kann nur zwischen gleichartigen Größen bestehen. Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Quotienten haben.

Erklärung. Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen nennt man Proportion.

Heißt die Proportion $a : b = c : d$, so sagt man: a verhält sich zu b wie c zu d. Die Glieder a und b nennt man äußere, b und c innere Glieder, a und c Vorderglieder, b und d Hinterglieder, a und c, b und d homologe, entsprechende Glieder; d heißt die vierte Proportionale zu a, b, c.

Eine Proportion $a : x = x : b$, in welcher die inneren Glieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion, das mittlere Glied x die mittlere Proportionale zu den beiden äußeren a und b.

§ 43.

Lehrsatz 1. In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren.

Voraussetzung. $a : b = c : d$.

Behauptung. $ad = bc$. (52)

Beweis. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt, wenn man beide Seiten der Gleichung mit bd multipliziert, $ad = bc$.

Zusatz. Ist $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, so folgt $ad \gtrless bc$.

Folgerung 1. In jeder stetigen Proportion ist das Quadrat des mittleren Gliedes gleich dem Produkte der beiden äußeren Glieder. Aus $a : x = x : b$ folgt $x^2 = ab$.

Folgerung 2. In jeder Proportion findet man ein äußeres Glied, indem man das Produkt der beiden inneren Glieder durch das andere

Digitized by Google

äußere dividiert; man findet ein inneres Glied, indem man das Produkt der beiden äußeren Glieder durch das andere innere dividiert.

Aus $a:b=c:d$ folgt $ad=bc$, $d=\frac{bc}{a}$, $b=\frac{ad}{c}$.

Lehrsatz 2. Wenn ein Produkt zweier Faktoren gleich dem zweier anderen ist, so sind die Faktoren des einen die äußeren, die des anderen die inneren Glieder einer Proportion.

Voraussetzung. $ad=bc$.

Behauptung. $a:b=c:d$, $a:c=b:d$, $d:b=c:a$, $d:c=b:a$, $b:a=d:c$, $b:d=a:c$, $c:a=d:b$, $c:d=a:b$.

Beweis. Aus $bc=ad$ folgt $\frac{bc}{ab}=\frac{ad}{ab}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

Ebenso läßt sich, indem man die Seiten der Produktengleichung durch das Produkt der Hinterglieder der zu beweisenden Proportion dividiert, die Richtigkeit der anderen sieben Proportionen beweisen.

Folgerung. In jeder Proportion darf man

1. die inneren, ebenso die äußeren Glieder untereinander,
2. die inneren mit den äußeren vertauschen.

Lehrsatz 3. In jeder Proportion darf man je ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren.

Beweis. Aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ folgt $\frac{na}{b}=\frac{nc}{d}$ oder $\frac{na}{nb}=\frac{c}{d}$.

Aus $\frac{na}{nb}=\frac{c}{d}$ oder aus $\frac{na}{b}=\frac{nc}{d}$ folgt $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

§ 44.

Lehrsatz 4. Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich jedes Aggregat der Vorderglieder zu dem entsprechenden Aggregate der Hinterglieder wie das Vorderglied eines der Verhältnisse zu seinem Hintergliede (korrespondierende Addition).

Voraussetzung. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

Behauptung.
$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{a-b+kc}{a'-b'+kc'}=\frac{a}{a'}. \qquad (53)$$

Beweis. Es sei $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=q$, so ist

$$\begin{aligned} a&=q\cdot a'\\ b&=q\cdot b'\\ c&=q\cdot c'\\ \hline a+b+c&=q(a'+b'+c')\\ a-b+kc&=q(a'-b'+kc'). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Zusatz 1. Verhalten sich zwei Zahlen wie 3 zu 4, so darf man immer sagen, die erste ist 3k, die zweite 4k, wobei k vorläufig unbestimmt bleibt. Mit Hilfe dieser Annahme kann man jede zusammengesetzte Proportion vereinfachen.

Aus $(x - h) : h = 7 : 4$ folgt $x - h = 7k$, $h = 4k$,
also $x = 7k + 4k = 11k$ oder $x : h = 11 : 4$.

Folgerungen. Aus der Proportion $a : b = c : d$ oder $a : c = b : d$ ergibt sich mit Anwendung der Gleichung der Behauptung von L. 4:

$$1.\ (a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d. \tag{54}$$

Die Summe oder Differenz der Vorderglieder verhält sich zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

$$2.\ (a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d. \tag{54}$$

Die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder verhält sich zur Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder wie zwei homologe Glieder.

$$3.\ \begin{aligned}(a + b) : (a - b) &= (c + d) : (c - d);\\ (a + c) : (a - c) &= (b + d) : (b - d).\end{aligned} \tag{54*}$$

Die Summe und Differenz eines äußeren und eines inneren Gliedes verhalten sich zueinander wie die Summe und Differenz des anderen äußeren und inneren Gliedes.

Lehrsatz 5. Mehrere Proportionen lassen sich in eine zusammensetzen; es verhält sich das Produkt der ersten Glieder zum Produkte der zweiten Glieder wie das Produkt der dritten Glieder zum Produkte der vierten Glieder.

Voraussetzung. $a_1 : b_1 = c_1 : d_1$; $a_2 : b_2 = c_2 : d_2$; $a_3 : b_3 = c_3 : d_3$.

Behauptung. $(a_1 a_2 a_3) : (b_1 b_2 b_3) = (c_1 c_2 c_3) : (d_1 d_2 d_3)$.

Beweis. Aus $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$; $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}$; $\frac{a_3}{b_3} = \frac{c_3}{d_3}$

folgt durch Multiplikation der rechten und linken Seiten der Gleichungen

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} = \frac{c_1 c_2 c_3}{d_1 d_2 d_3} \text{ oder}$$

$$(a_1 a_2 a_3) : (b_1 b_2 b_3) = (c_1 c_2 c_3) : (d_1 d_2 d_3). \tag{55}$$

Zusatz 2. Mehrere gleiche Verhältnisse bilden eine fortlaufende Proportion, in welcher die Vorderglieder aller Verhältnisse sich wie ihre Hinterglieder verhalten.

Ist $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, so setzt man $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

Zusatz 3. Früher unterschied man die jetzt kurzerhand Proportionen genannten Verhältnisgleichungen als geometrische von den arithmetischen und harmonischen Proportionen. Im Gebrauch sind von diesen noch die stetigen,

Digitized by Google

wo das Mittelglied doppelt auftritt. Also stetige arithmetische Proportion $a - x = x - b$, arithmetisches Mittel $x = \frac{a+b}{z}$, geometrische Proportion $a : y = y : b$, geometrisches Mittel $y = \sqrt{ab}$, harmonische Proportion $\frac{1}{a} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{b}$, harmonisches Mittel $z = \frac{2ab}{a+b}$.

Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist stets auch das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und harmonischen Mittel.

Beispiel. $a = 2$, $b = 18$, $x = 10$, $y = 6$, $z = 3\frac{3}{5}$, $y = \sqrt{x \cdot z}$.

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Rechnungsarten der dritten Stufe.

---

1. Kapitel. Von der Potenzierung.

A. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§ 45.

Erklärung. Von der Addition gelangte man zu einer höheren Rechnungsstufe, der Multiplikation, dadurch, daß man eine Summe gleicher Summanden abgekürzt durch Angabe eines Summanden und der Anzahl der Summanden schrieb. Die Summe gleicher Summanden nannte man Produkt.

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3.$$

Schreibt man von einem Produkt gleicher Faktoren nur einen Faktor und die Anzahl der Faktoren nieder, so ergibt sich wieder eine höhere Rechnungsstufe, die Potenzierung.

Ein Produkt gleicher Faktoren heißt Potenz, der Faktor wird Grundzahl oder Basis, die Anzahl der Faktoren Exponent genannt,

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 \qquad a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot (\text{m mal}) = a^m. \tag{56}$$

Sprich 4 hoch 3, a hoch m, oder a zur m^{ten}. Die Größe a^m soll nicht nur die Forderung der Potenzierung, sondern auch ihr Ergebnis ausdrücken. In der Gleichung $4^3 = 64$ ist an sich 4 die Basis, 3 der Exponent, 64 die Potenz; man nennt aber auch die Verbindung 4^3 eine Potenz.

Lehrsatz 1. Multipliziert man zwei Potenzen derselben Grundzahl miteinander, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenziert.

Behauptung. $a^m \cdot a^r = a^{m+r}.$ (57)

Beweis. Aus der Erklärung der Potenz folgt mit Anwendung von § 13 L.

$$a^m \cdot a^r = aaa \dots (\text{m mal}) \cdot aaaa \dots (\text{r mal})$$
$$= aaaaaaa \dots \dots ((\text{m} + \text{r}) \text{ mal}) = a^{m+r}.$$

Umkehrung. Potenziert man eine Zahl mit der Summe zweier Zahlen, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Zahl mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliziert.

Lehrsatz 2. Dividiert man eine Potenz durch eine andere Potenz mit gleicher Grundzahl und kleinerem Exponenten, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Digitized by Google

Behauptung. $a^m : a^r = a^{m-r}$ ($m > r$ vorausgesetzt). (58)

Beweis (durch die Probe). Multipliziert man die rechte Seite mit dem Divisor der linken Seite, so erhält man

$$a^{m-r} \cdot a^r = a^{m-r+r} = a^m.$$

Umkehrung. Potenziert man eine Zahl mit einer Differenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Zahl mit dem Minuendus und Subtrahendus gesondert potenziert und erstere Potenz durch letztere dividiert.

Lehrsatz 3. Potenziert man ein Produkt, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen multipliziert.

Behauptung. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$. (59)

Beweis. $(ab)^m$ ist ein Produkt aus m Faktoren, deren jeder gleich (ab) ist, also: $(ab)^m = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots (\text{m mal})$,

$= ababab \cdots (\text{m mal})$,

$= (aaa \cdots (\text{m mal})) \cdot (bbb \cdots (\text{m mal})) = a^m \cdot b^m$.

Dasselbe gilt auch von der Potenzierung eines Produkts mehrerer Faktoren.

Umkehrung. Multipliziert man Potenzen von gleichen Exponenten miteinander, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man das Produkt der Grundzahlen mit dem Exponenten potenziert.

Lehrsatz 4. Potenziert man einen Bruch, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man Zähler und Nenner potenziert und erstere Potenz durch letztere dividiert.

Behauptung. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$. (60)

Beweis. Nach der Erklärung der Potenz ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots (\text{m mal}) = \frac{aaa \cdots (\text{m mal})}{bbb \cdots (\text{m mal})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Umkehrung. Dividiert man eine Potenz durch eine andere Potenz von gleichem Exponenten, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Quotienten der Grundzahlen mit dem Exponenten potenziert.

Lehrsatz 5. Potenziert man eine Potenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Grundzahl mit dem Produkte der Exponenten potenziert.

Behauptung. $(a^m)^r = a^{mr}$. (61)

Beweis. Nach der Erklärung der Potenz ist:

$$(a^m)^r = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots (\text{r mal}) = a^{m+m+m+\cdots (\text{r mal})} = a^{mr}.$$

Umkehrung. Potenziert man eine Zahl mit dem Produkte zweier Zahlen, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die Zahl mit den Faktoren nacheinander potenziert.

Digitized by Google

Zusatz. Bei der Potenzierung einer Potenz darf man die Exponenten miteinander vertauschen, denn $(a^m)^r = a^{mr} = a^{rm} = (a^r)^m$.

Lehrsatz 6. Durch Vertauschung von Basis und Exponent erhält die Potenz einen andern Wert. $3^2 = 9$, $2^3 = 8$.

Die einzige Ausnahme in ganzen Zahlen bildet $2^4 = 4^2$.

Das Vertauschungsgesetz gilt also für Potenzen nicht.

Lehrsatz 7. Potenziert man eine negative Zahl mit einem geraden Exponenten, so erhält man ein positives Ergebnis, bei ungeradem Exponenten ist auch das Ergebnis negativ.

$$(-2)^2 = +4, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-2)^4 = +16.$$

Folgerung. Aus der Gleichheit der Potenzen und Exponenten darf man nicht auf die Gleichheit der Grundzahlen schließen. Also aus $(-3)^2 = +9$ und $(+3)^2 = +9$ folgt wohl $(-3)^2 = (+3)^2$, aber die Grundzahlen sind nicht gleich. Der Schluß ist unbedenklich, wenn nur positive Zahlen zugelassen werden.

Lehrsatz 8. Sind zwei Potenzen von gleicher Grundzahl gleich, so sind auch ihre Exponenten gleich. Ist $a^x = a^m$, so ist $x = m$.

Dieser Satz folgt, wenn m eine ganze absolute Zahl ist, aus der Definition der Potenz. Nach dem Permanenzgesetz wird er später dahin erweitert, daß er gilt, wenn x und m reelle Zahlen sind. Er gilt aber nicht bei Zulassung imaginärer und komplexer Exponenten (§ 57, 58).

§ 46.

Lehrsatz. Das Quadrat einer Summe ist um das doppelte Produkt je zweier Summanden größer als die Summe der Quadrate,

$$(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (62)$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2. \qquad (62^*)$$

Anmerkung. Besteht die Summe aus relativen Zahlen, so bestimmen sich die Vorzeichen der doppelten Produkte nach den üblichen Regeln.

$$(3a - 4b - 5c)^2 = 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 - 24ab - 30ac + 40bc.$$

§ 47.

Lehrsatz 1. Der Kubus einer Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Kuben vermehrt um das dreifache Produkt aus der Summe und dem Produkt der beiden Zahlen.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b). \qquad (63^*)$$

Beweis. $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Digitized by Google

Folgerung. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
und $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, **(63)**

wenn man b durch $-b$ ersetzt. Ferner ist:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \quad \textbf{(64)}$$

Lehrsatz 2. Die Koeffizienten der Potenzen eines Binoms entnimmt man dem sogenannten Pascalschen Dreieck (1654)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & & \cdots & & & & & \end{array}$$

Danach ist

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Zusatz. Ist in $(1+x)^n$ x sehr klein gegenüber 1, so ist $(1+x)^n \sim 1 + nx$, wo $\sim$ annähernd gleich bedeutet. **(65)**

B. Potenzen, deren Exponent Null oder negativ ist.

§ 48.

Bei der Division der Potenzen von gleicher Grundzahl (§ 45, L. 2) wurde vorausgesetzt, daß der Exponent des Divisors kleiner als der des Dividendus, daß also der sich ergebende Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Läßt man diese Bedingung fallen, so gelangt man zu Potenzen mit dem Exponenten Null oder mit negativen Exponenten.

1. Setzt man $m = r$ in der Formel $a^m : a^r = a^{m-r}$, so geht sie über in:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0;$$

es ist aber $a^m : a^m = 1$, daher setzt man

$$a^0 = 1. \quad \textbf{(66)}$$

Anmerkung 1. Obwohl a^0 keinen der Erklärung der Potenz entsprechenden Sinn und nur die Form einer Potenz hat, darf man sie als eine Potenz behandeln, wenn die für Potenzen mit positiven Exponenten bewiesenen Sätze, auf a^0 angewandt, ein richtiges Ergebnis liefern. In der Tat ist

1. $a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$.
2. $a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m = a^{m-0}$.
3. $a^0 : a^m = 1 : a^m = 1 : a^{m-0}$.
4. $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (ab)^0$.
5. $a^0 : b^0 = 1 : 1 = 1 = (a:b)^0$.
6. $(a^0)^m = 1^m = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$.

2. Nimmt man $m < r$ an, etwa $r = m + d$, so erhält man:

$$a^m : a^{m+d} = a^m : (a^m \cdot a^d) = 1 : a^d.$$

Digitized by Google

Nach § 45, L. 2 würde aber $a^m : a^{m+d} = a^{m-m-d} = a^{-d}$ sein; man setzt daher

$$a^{-d} = \frac{1}{a^d}. \tag{67}$$

Unter einer Potenz mit negativem Exponenten versteht man einen Bruch, dessen Zähler gleich Eins, und dessen Nenner die Potenz von derselben Basis aber entgegengesetztem Exponenten ist.

Anmerkung 2. Obwohl a^{-d} keinen der Erklärung der Potenz entsprechenden Sinn, sondern nur die Form einer Potenz hat, darf man sie als Potenz behandeln, wenn die für Potenzen mit positiven Exponenten bewiesenen Sätze unter Voraussetzung obiger Erklärung zu richtigen Ergebnissen führen. In der Tat ist:

1. $a^{-m} \cdot a^{-r} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^r} = \frac{1}{a^{m+r}} = a^{-(m+r)}$.

2. $a^{-m} : a^{-r} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^r} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{a^r}{1} = a^{r-m} = a^{-m+r}$.

3. $(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^m = 1 : \frac{a^m}{b^m} = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{b^m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$.

5. $(a^{-m})^{-r} = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^r = (a^m)^r = a^{mr}$.

Folgerung 1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$.

Wird also eine Zahl mit einem negativen Exponenten potenziert, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man ihren reziproken Wert mit dem entgegengesetzten Exponenten potenziert.

Folgerung 2. Aus der Erklärung der Potenz mit negativem Exponenten folgt, daß man in jedem Monome Potenzen, welche im Nenner als Faktoren vorkommen, mit entgegengesetzten Exponenten in den Zähler setzen darf, ferner, daß man Potenzen mit negativen Exponenten beseitigen kann, indem man sie, wenn sie im Zähler als Faktoren vorkommen, in den Nenner, wenn sie im Nenner vorkommen, in den Zähler mit positiven Exponenten setzt.

$$\frac{24a^5b}{5c^4d^2} = \frac{24}{5} a^5 b c^{-4} d^{-2}; \quad \frac{3a^{-2}b}{8c^{-3}} = \frac{3bc^3}{8a^2}.$$

---

2. Kapitel. Von der Radizierung, insbesondere von den reellen Wurzeln.

§ 49.

Erklärung. Von der Multiplikation gab es zwei Umkehrungen, das Teilen und das Messen, je nachdem der Multiplikandus oder der Multiplikator gesucht wurden, wenn das Produkt und der andere Faktor bekannt waren. Da aber Multiplikandus und Multiplikator vertauschbar waren, ließen sich diese beiden Rechnungen als Division zusammenfassen.

Digitized by Google

Da Basis und Exponent nicht vertauschbar sind (§ 45, L. 6), sind die Umkehrungen der Potenzierung wesentlich voneinander verschieden. **Sind die Potenz und der Exponent bekannt, so findet man die unbekannte Basis (Wurzel) durch Radizierung.** Das Radizieren entspricht dem Teilen. Wie bei letzterem eine Zahl in gleiche Summanden zu zerlegen ist, so ist beim Radizieren eine Zahl in gleiche Faktoren zu zerlegen. 12 teilt man durch 3, indem man es in $4+4+4$ zerlegt, den Teil aber nur einmal hinschreibt. 64 radizirt man durch 3, indem man es in $4 \cdot 4 \cdot 4$ zerlegt, den Faktor aber nur einmal hinschreibt:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

und spricht: Dritte Wurzel aus 64 ist vier. 3 heißt **Wurzelexponent**, 64 **Radikand**, 4 **Wurzel**, aber wie früher bezeichnet auch $\sqrt[3]{64}$ nicht nur die Operation, sondern auch das Ergebnis, und $\sqrt[3]{64}$ wird ebenfalls eine Wurzel genannt.

Da $\left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 4^3 = 64$, **kann man unter einer Wurzel auch die Zahl verstehen, welche mit dem Wurzelexponent potenziert den Radikand ergibt.**

Da $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3}$, ist auch $\sqrt[3]{4^3} = 4$.

Allgemein $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$. **(68)**

Potenziert und radiziert man eine Zahl mit demselben Exponenten, so bleibt die Zahl unverändert.

Anmerkung 1. Die zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel, der Wurzelexponent 2 wird fortgelassen, wenn ein Mißverständnis unmöglich ist: statt 3. Wurzel sagt man auch Kubikwurzel.

Anmerkung 2. Daß $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[n]{a} = x$ ist, erkennt man daran, daß $4^3 = 64$, $x^n = a$ ist. Im folgenden wird zunächst angenommen, daß der Radikand eine absolute Zahl ist, und daß für jede Wurzel derselben eine absolute Zahl existiert, welche, mit dem Exponenten potenziert, den Radikanden ergibt. (Vgl. § 52, 54, 55, 61.) Andernfalls wären die sämtlichen Beweise nach § 45, Lf. 7, Folgerung unzulässig.

Anmerkung 3. Eine Zahl durch eine zweite radizieren heißt, die erste in so viele gleiche Faktoren zerlegen, wie die zweite fordert, und die Größe eines Faktoren angeben; z. B. 125 radiziert durch 3. Zerlegung $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Ergebnis 5.

§ 50.

Lehrsatz 1. Radiziert man ein Produkt, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man jeden Faktor radiziert und die entstandenen Wurzeln multipliziert.

Digitized by Google

Behauptung. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$. (69)

Beweis (durch die Probe). Potenziert man die rechte Seite mit m, so erhält man: $\left(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = ab$.

Dasselbe gilt von einem Produkte mehrerer Faktoren.

Umkehrung. Multipliziert man Wurzeln von gleichem Exponenten, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man das Produkt der Radikanden mit dem Exponenten radiziert; z. B. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{1000}$.

Lehrsatz 2. Radiziert man einen Bruch, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man Zähler und Nenner radiziert und die erstere Wurzel durch die letztere dividiert.

Behauptung. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$. (70)

Beweis. Potenziert man die rechte Seite mit m, so erhält man:

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}.$$

Umkehrung. Dividiert man eine Wurzel durch eine andere von gleichem Exponenten, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Quotienten der Radikanden mit dem Exponenten radiziert.

$$\sqrt{100} : \sqrt{4} = \sqrt{25}.$$

Anmerkung. Wurzelglieder eines Polynoms können durch Addition oder Subtraktion nur vereinigt werden, wenn sie Wurzeln von gleichen Radikanden und Exponenten als Faktoren enthalten.

$$5\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{10} - \sqrt[3]{6} + \tfrac{8}{5}\sqrt{10} = 4\sqrt[3]{6} - \tfrac{2}{5}\sqrt{10}.$$

Lehrsatz 3. Radiziert man eine Potenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert und mit dem erhaltenen Quotienten die Grundzahl potenziert.

Voraussetzung. $\frac{r}{m}$ eine ganze Zahl. (71)

Behauptung. $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$.

Beweis. Potenziert man die rechte Seite mit m, so erhält man:

$$\left(a^{\frac{r}{m}}\right)^m = a^{\frac{r}{m} \cdot m} = a^r.$$

Lehrsatz 4. Radiziert man eine Potenz, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man ihre Basis radiziert und die entstandene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziert.

Digitized by Google

Behauptung. $\sqrt[m]{a^r} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^r$. (72)

Beweis. Es ist $\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[m]{aaa\cdots(r\,\text{mal})}$

$= \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdots(r\,\text{mal}) = \left(\sqrt[m]{a}\right)^r$.

Umkehrung. Potenziert man eine Wurzel, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Radikanden potenziert und die erhaltene Potenz mit dem Wurzelexponenten radiziert.

Lehrsatz 5. Die Wurzel aus einer Potenz ändert ihren Wert nicht, wenn man den Potenz- und den Wurzelexponenten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Behauptung. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{rs}}$, $\sqrt[ns]{a^{rs}} = \sqrt[n]{a^r}$. (73)

Beweis. Potenziert man in der zweiten Gleichung der Behauptung die rechte Seite mit ns, so erhält man:

$$\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^{ns} = \left[\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^n\right]^s = (a^r)^s = a^{rs}.$$

Anmerkung. Der vorstehende Satz wird hauptsächlich angewendet, um Wurzeln auf denselben Grad zu bringen. Z. B. ist:

$$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^5}\cdot\sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12]{a^{16}\cdot a^{15}\cdot a^7} = \sqrt[12]{a^{38}} = a^3\sqrt[12]{a^2} = a^3\sqrt[6]{a}.$$

Lehrsatz 6. Radiziert man eine Wurzel, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man den Radikanden mit dem Produkte der beiden Exponenten radiziert.

Behauptung. $\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[mr]{a}$. (74)

Beweis. $\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}}$ ist eine Größe, welche mit m potenziert $\sqrt[r]{a}$ gibt. Potenziert man die rechte Seite mit m, so erhält man nach L. 4 U. und L. 5:

$$\left(\sqrt[mr]{a}\right)^m = \sqrt[mr]{a^m} = \sqrt[r]{a}.$$

Umkehrung. Radiziert man eine Zahl mit dem Produkte zweier Zahlen, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man sie mit den Faktoren nacheinander radiziert. Die Reihenfolge, in welcher man radiziert, ist dabei willkürlich.

§ 51.

Erklärung 1. Ist in der Gleichung $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$ (75)

$\frac{r}{m}$ keine ganze Zahl, so wird die rechte Seite eine Potenz mit gebrochenem Exponenten, eine Bruchpotenz. Man versteht daher unter einer Bruchpotenz die Wurzel aus einer Potenz von gleicher Grundzahl, deren Potenzexponent gleich

Digitized by Google

dem Zähler, und deren Wurzelexponent gleich dem Nenner des gebrochenen Exponenten ist.

Anmerkung. Eine Bruchpotenz hat keinen der Erklärung der Potenz entsprechenden Sinn, sondern nur die Form einer Potenz. Man kann sie aber als eine Potenz behandeln, wenn man zeigt, daß unter Voraussetzung obiger Erklärung die für Potenzen mit ganzen Exponenten bewiesenen Sätze, auf die Bruchpotenz angewandt, richtige Ergebnisse liefern. In der Tat, es ist:

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[ns]{a^{ms+rn}} = a^{\frac{ms+rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$.

2. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[ns]{a^{ms-rn}} = a^{\frac{ms-rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$.

3. $(ab)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(ab)^r} = \sqrt[s]{a^r b^r} = \sqrt[s]{a^r} \sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{r}{s}}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\frac{a}{b}\right)^r} = \sqrt[s]{\frac{a^r}{b^r}} = \frac{\sqrt[s]{a^r}}{\sqrt[s]{b^r}} = \frac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}}$.

5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^{\frac{mr}{n}}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} = \sqrt[sn]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$.

Zusatz. Schwierigere Aufgaben, in denen Wurzeln mit verschiedenen Exponenten vorkommen, werden mit Hilfe der Bruchpotenzen rascher und sicherer gelöst. Allerdings muß zum Schluß die Deutung in Wurzeln gegeben werden; z. B.:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2 b^2}}{\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^2 b}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}.$$

Erklärung 2. Ist in der Potenz a^v der Exponent v eine Zahl, welche sich mit beliebiger Annäherung zwischen zwei Brüche w_1 und w_2 einschließen läßt, so soll unter a^v die Potenz a^w verstanden werden, wo w diejenige der der Zahlen w_1 und w_2 ist, welche v am nächsten liegen.

Hiermit ist eine Definition für Potenzen mit irrationalen (§ 53) Exponenten gegeben, die für elementare Zwecke ausreicht. Ausgeschlossen bleiben bis auf weiteres komplexe Exponenten (§ 59).

§ 52.*

Lehrsatz 1. Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl ist kein eigentlicher Bruch.

Beweis. Wäre a eine ganze Zahl und $\sqrt[n]{a} = \frac{b}{c}$, wobei b und c als teilerfremd angenommen werden dürfen, so müßte $a = \frac{b^n}{c^n}$, also b^n ein Vielfaches von c^n sein. Dies widerspricht § 40 F., da b und c, also auch b^n und c^n teilerfremd sind.

Digitized by Google

Zusatz. Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl ist entweder eine ganze Zahl, z. B. $\sqrt{4}$, oder sie ist weder eine ganze Zahl noch ein Bruch. Denn jede Potenz eines irreduzibeln Bruches ist wieder ein irreduzibler Bruch.

$$\left(\frac{19}{11}\right)^2 = \frac{19 \cdot 19}{11 \cdot 11} = \frac{361}{121}.$$

Lehrsatz 2. Der Wert einer Wurzel liegt zwischen zwei Brüchen, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann.

Behauptung. $\sqrt[n]{a} = \alpha = \lim (a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n})_{n=\infty}$.

Beweis. Es sei $\sqrt{2}$ zu bestimmen, so ist

$$1 < \sqrt{2} < 2, \quad \text{weil } 1 < 2 < 2^2;$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5, \quad \text{weil } 1{,}96 < 2 < 2{,}25;$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42, \quad \text{weil } 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164,$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415, \quad \text{weil } 1{,}999396 < 2 < 2{,}002225.$$

Ebenso liegt $\sqrt[3]{10}$ zunächst zwischen 2 und 3, dann zwischen 2,1 und 2,2, weiter zwischen 2,15 und 2,16, weil $2{,}15^3 = 9{,}93838 < 10 < 10{,}0777 = 2{,}16^3$.

§ 53.*

Erklärung. Eine Summe von unendlich vielen Brüchen, welche sich unbeschränkt einem bestimmten Grenzwerte (α) nähert und eine Forderung (z. B. $\alpha^n = a$) mit beliebiger Genauigkeit erfüllt, die durch einen gewöhnlichen Bruch nicht erfüllt werden kann, heißt eine irrationale Zahl.

Im Gegensatze zu den irrationalen heißen die ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen rationale Zahlen.

Zur Veranschaulichung der irrationalen Zahl $\sqrt{7}$ auf der Zahlengeraden (§ 25) teilt man den Zahlraum 2 bis 3, dann den Zahlraum 2,6 bis 2,7 in je 10 gleiche Teile. $\sqrt{7}$ liegt dann zwischen 2,64 und 2,65.

Die Reihe der natürlichen positiven und negativen ganzen Zahlen wurde an einer vom Nullpunkte nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden geraden Linie dargestellt, indem man die Längeneinheit von jenem Punkte aus nach beiden Seiten unbegrenzt oft abtrug. Infolge der Einführung der gebrochenen Zahlen wurde jede Längeneinheit in je 10 gleiche Teile, die erhaltene gebrochene Einheit 0,1 wieder in 10 gleiche Teile, die erhaltene Einheit 0,01 wieder in 10 gleiche Teile usw. geteilt.

Wie nahe aber auch bei dieser fortgesetzten Teilung die Teilpunkte einander rücken, man behält immer nur eine unterbrochene Reihe von Punkten.

Auch durch die Einführung der Wurzeln wird die Gerade nicht lückenlos ausgefüllt, denn es gibt Zahlen, die sich nicht durch Wurzeln ausdrücken lassen; z. B. π.

Digitized by Google

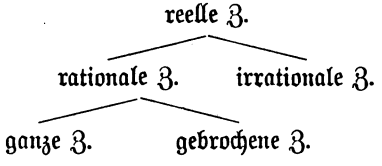
Man stellt nun die Hypothese auf:

Wenn eine Strecke als Einheit gegeben ist, entspricht der Länge einer jeden Strecke eine Zahl. Ist diese Zahl nicht rational, so heißt sie irrational. Dabei kann man noch zwischen algebraischen und transzendenten Irrationalen unterscheiden, von denen die ersteren sich durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen in rationale Zahlen verwandeln lassen, die letzteren nicht. Die Wurzeln sind die einfachsten algebraischen Irrationalen, die Logarithmen (vgl. § 64) sind bereits transzendent. Doch geht der Begriff algebraische Zahl sowie transzendente Zahl weiter als der der bloßen irrationalen Zahlen und umfaßt auch komplexe (vgl. § 58).

Die rationalen und irrationalen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos aus. Die Zahlenreihe ist dadurch zu einer stetigen geworden, zu einem Kontinuum, wie es die Punkte einer Geraden bilden.

Die Gesamtheit der rationalen und der irrationalen Zahlen bilden die reellen Zahlen.

Danach ergibt sich folgende Einteilung:



Jede dieser Zahlarten kann absolut (ohne Vorzeichen) oder relativ (mit Vorzeichen) auftreten. Da die absoluten Zahlen aber als positiv betrachtet werden können, genügt es, den weiteren Gegensatz

positiv —— negativ

festzuhalten.

§ 54.

Für die Rechnung mit den irrationalen Zahlen, besonders den Quadratwurzeln, sind noch folgende Regeln hervorzuheben:

1. Man suche den Radikanden so in Faktoren zu zerlegen, daß man aus einem oder mehreren derselben die Wurzel ausziehen kann.

$$\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2},\quad \sqrt{16 + 32\sqrt{5}} = 4\sqrt{1 + 2\sqrt{5}},$$

$$\sqrt{8r^2 - 2r\sqrt{12r^2}} = \sqrt{8r^2 - 4r^2\sqrt{3}} = 2r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

2. Man bringe Nenner, welche innerhalb der Wurzel stehen, vor dieselbe.

$$\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a};\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab};\quad \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{15}.$$

$$3\sqrt{8} + 5\sqrt{\tfrac{1}{3}} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 6\sqrt{2} + \tfrac{5}{3}\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \sqrt{2}$$
$$= 7\sqrt{2} - \tfrac{1\,3}{3}\sqrt{3}.$$

Digitized by Google

3. Andererseits ist man zuweilen veranlaßt, vor der Wurzel stehende Faktoren unter die Wurzel zu bringen.

$$n\sqrt{b} = \sqrt{n^2 b}, \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

4. Wenn der Nenner eines Bruches Wurzeln enthält, so mache man ihn rational. Dies geschieht bei Quadratwurzeln, wenn der Nenner eingliedrig ist, indem man Zähler und Nenner mit der im Nenner stehenden Wurzel multipliziert.

$$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}+3}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{6}+1}{2}.$$

5. Ist der Nenner die Summe oder Differenz zweier Wurzelausdrücke oder einer rationalen Zahl und eines Wurzelausdrucks, so erweitert man den Bruch bzw. mit der Differenz oder Summe der beiden Glieder des Nenners.

$$\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})\ (2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}+\ \sqrt{6})\ (2\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{4\sqrt{12}-12-12+3\sqrt{12}}{8-6} = \frac{7\sqrt{12}-24}{2} = 7\sqrt{3}-12.$$

6. Ist der Nenner drei- oder viergliedrig, so werden wiederholte Multiplikationen obiger Art nötig.

7. Bei Doppelwurzeln von der Form $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ gelingt eine Zerlegung in zwei einfache Wurzeln, wenn $r = \sqrt{a^2-b}$ rational ist. Es ist

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+r)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-r)}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+r)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-r)}.$$

Der Beweis wird durch Quadrierung beider Seiten erbracht. Es ist z. B.

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}, \text{ wo } r = \sqrt{64-60} \text{ war.}$$

§ 55.

Lehrsatz 1. Die positive n^{te} Wurzel aus einer positiven Zahl a ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Wäre außer α auch β eine n^{te} Wurzel der positiven Zahl a, so müßte sowohl $\alpha^n = a$ als auch $\beta^n = a$ sein; sind α und β beide positiv, so sind sie nach § 45, Lf. 7, Folgerung gleich.

Lehrsatz 2. Die Quadratwurzel, allgemein jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl, hat einen positiven und einen negativen Wert.

Behauptung. $\sqrt{a^2} = \pm a, \quad \sqrt[2m]{a^{2m}} = \pm a.$ (76)

Beweis. Potenziert man die rechten Seiten beider Gleichungen mit 2 bzw. 2m, so erhält man:

$$(+a)^2 = (-a)^2 = a^2, \quad (+a)^{2m} = (-a)^{2m} = +a^{2m}.$$

Digitized by Google

Lehrsatz 3. Jede ungerade Wurzel aus einer Zahl hat einen positiven oder negativen Wert, je nachdem die Zahl positiv oder negativ ist.

Behauptung. $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = +a, \quad \sqrt[2m+1]{-a^{2m+1}} = -a.$ (76*)

Beweis. Durch Potenzierung der linken Seiten mit $(2m+1)$ ergibt sich:

$$(+a)^{2m+1} = a^{2m+1},$$
$$(-a)^{2m+1} = (-a)^{2m} \cdot (-a)^1 = -a \cdot a^{2m} = -a^{2m+1}.$$

Lehrsatz 4. Die Quadratwurzel, allgemein jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl, ist weder eine positive noch eine negative Zahl.

Beweis. Potenziert man eine negative oder positive Zahl mit einer geraden Zahl, so ergibt sich stets eine positive Zahl.

Anmerkung. Sind a, b und c reelle Zahlen, so folgt aus

$$a^b = a^c \text{ stets } b = c,$$

aber aus $b^a = c^a$ folgt nur dann $b = c$ mit Notwendigkeit, wenn a ungerade ist, oder wenn b und c absolute bzw. positive Zahlen sind.

---

3. Kapitel. Von den imaginären und komplexen Zahlen.

A. Rein imaginäre Zahlen.

§ 56.

Erklärung 1. Jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl heißt eine imaginäre Größe. Im Gegensatze dazu heißen die positiven und negativen, ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen reelle Größen. In folgendem werden nur die Quadratwurzeln der negativen Zahlen in Betracht gezogen. Als Einheit der imaginären Größen dient $\sqrt{-1}$; sie heißt die imaginäre Einheit und wird mit i bezeichnet. Aus der imaginären Einheit werden die imaginären Zahlen abgeleitet, wie aus den reellen Einheiten die reellen Zahlen; es ist

$$ai = i + i + i \cdots (a \text{ mal}).$$

Ebenso bildet man aus der negativen imaginären Einheit $-\sqrt{-1} = -i$ die negativen imaginären Zahlen

$$(-i) + (-i) + (-i) + \cdots (a \text{ mal}) = (-i) \cdot a = -ai.$$

Für a läßt man ferner auch gebrochene und irrationale Werte zu, indem man die imaginäre Einheit gerade so wie die reelle Einheit geteilt denkt. Doch soll a bis auf weiteres stets positiv sein. Dann nennt man a den absoluten Wert der imaginären Zahl.

Ähnlich wie für reelle Zahlen beweist man den

Lehrsatz 1. Addiert oder subtrahiert man imaginäre Zahlen, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die imaginäre Einheit mit der Summe bzw. der Differenz ihrer absoluten Werte multipliziert.

Es ist $$ai \pm bi = (a \pm b)i.$$ (77)

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Multipliziert man eine imaginäre Zahl mit einer reellen Zahl, so ergibt sich derselbe Zahlwert, wie wenn man die imaginäre Einheit mit dem Produkte der absoluten Werte multipliziert.

Es ist $(bi)\cdot a = bi + bi + \cdots (a\,\text{mal}) = (b + b + \cdots (a\,\text{mal}))i = ab\cdot i$.

Ähnlich wie bei reellen Zahlen findet man $(bi)\cdot(\pm a) = \pm abi$.

Erklärung 2. Nimmt man an, daß der Multiplikator eines Produktes imaginär ist, so hat das Produkt keinen der Erklärung der Multiplikation entsprechenden Sinn. Auf Grund des Permanenzprinzips, das auch für imaginäre Zahlen gelten soll, wäre

nach (63) $(\sqrt{-a})\cdot(\sqrt{-a}) = (\sqrt{-a})^2 = -a$, $(\sqrt{-1})^2 = -1$,

nach (11) $(bi)a = a\cdot(bi) = abi$

und daher $(ai)\cdot(bi) = a\cdot(bi\cdot i) = a(bi^2) = abi^2 = -ab$. Daher erweitert man den Begriff der Multiplikation dahin, daß man

$$(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a,\quad (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1 \qquad (78)$$

setzt, daß also i eine Größe bedeutet, deren Quadrat gleich -1 ist, und daß man unter dem Produkte eines imaginären Multiplikators und eines reellen oder imaginären Multiplikandus das Produkt ihrer Einheiten, multipliziert mit dem Produkte ihrer absoluten Werte, versteht. Man darf dann die scheinbaren Produkte i^2, $a\cdot(bi)$, $(bi)\cdot(ai)$ als wirkliche Produkte behandeln, wenn die Rechnungen mit denselben unter Anwendung obiger Erklärung und der für ein Produkt geltenden Sätze zu Ergebnissen führen, die den Sätzen über reelle Größen unter der hinzukommenden Bedingung, daß $i^2 = -1$ ist, entsprechen. Z. B. ist nach L. 1 und Erkl. 2

$ai(bi+ci) = ai[(b+c)i] = a(b+c)i^2 = -a(b+c) = -ab - ac = abi^2 + aci^2$.

Lehrsatz 3. Jede imaginäre Quadratwurzel $(\sqrt{-a})$ läßt sich als das Produkt eines reellen positiven Faktors $(\sqrt{a})$ und der imaginären Einheit $(\sqrt{-1})$ darstellen.

Behauptung. $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot i$. (79)

Beweis. Quadriert man die rechte Seite, so erhält man:

$$(\sqrt{a}\cdot i)^2 = a\cdot i^2 = a\cdot(-1) = -a.$$

Anmerkung. Die Reihe der imaginären Zahlen i, 2i, 3i $\cdots$ kann daher auch durch $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}\cdots$ dargestellt werden.

Folgerung.

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = (\sqrt{a}\cdot i)(\sqrt{b}\cdot i) = \sqrt{ab}\cdot i^2 = -\sqrt{ab}. \qquad (79)$$

Hiermit ist eine Abweichung des Rechnens mit imaginären Zahlen von dem mit reellen Zahlen gegeben. Wollte man $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{+ab}$ setzen, so folgte $(\sqrt{-a})(\sqrt{-a}) = \sqrt{+a^2} = \pm a$, während $(\sqrt{-a})^2 = -a$ sein soll.

Die Abweichung erklärt sich aus der Zweideutigkeit der Quadratwurzel. Es ist $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt{9} = \pm 3$, also $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = (\pm 2)\cdot(\pm 3) = \pm 6$, $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{36} = \pm 6$. Nimmt man nun $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = \sqrt{36}$, so kann

Digitized by Google

dies sowohl $+6$ als auch -6 sein. Es war aber festgesetzt, daß unter $\sqrt{-4}$ nur $+2i$ verstanden werden sollte, obgleich an sich $-2i$ ebenso zulässig ist. So kann $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ nur -6 sein. Hebt man die Beschränkung auf, so ist völlige Übereinstimmung vorhanden.

Erklärung 3. Unter dem Quotienten zweier imaginären Zahlen oder einer reellen und imaginären Zahl versteht man diejenige Zahl, welche, mit dem Divisor multipliziert, den Dividendus ergibt.

Es ist daher $\frac{ai}{bi}=\frac{a}{b}$, $\frac{ai}{b}=\frac{a}{b}i$, $\frac{a}{bi}=-\frac{a}{b}i$.

Aus der Erklärung der Multiplikation imaginärer Zahlen ergeben sich die Sätze über die Potenzierung imaginärer Zahlen. Alle geraden Potenzen einer imaginären Quadratwurzel sind reell, und zwar positiv, wenn der Exponent durch 4, negativ, wenn er nur durch 2 teilbar ist. Die ungeraden Potenzen sind imaginär, und zwar abwechselnd positiv und negativ, je nachdem der Exponent von der Form $4n+1$ oder $4n-1$ ist.

$(\sqrt{-a})^2=-a$, $(\sqrt{-a})^4=+a^2$, $(\sqrt{-a})^6=-a^3$, $(\sqrt{-a})^8=+a^4$, $(\sqrt{-a})^3=-a\sqrt{-a}$, $(\sqrt{-a})^5=a^2\sqrt{-a}$, $(\sqrt{-a})^7=-a^3\sqrt{-a}$ usw.

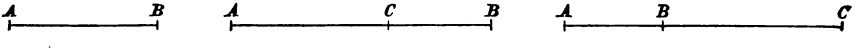
$i^0=1$, $i^1=+i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=+1$. Allgemein:

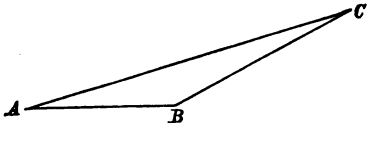
$$i^{4n}=+1,\quad i^{4n+1}=+i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i. \tag{80}$$

§ 57.*

Geometrische Hilfssätze. 1. Sind A und B zwei Punkte einer Geraden, so soll $AB+BA=0$ sein. Gehe ich von A nach B und von B nach A, so ist meine Entfernung vom Ausgangspunkt 0. $AB=-BA$.

2. Liegt C zunächst auf derselben Geraden wie A und B, so ist nach 1: $AC+CB+BA=0$, $AC+CB=-BA=AB$, also AB die Summe von AC und CB, AC und CB heißen die Teile von AB, auch wenn eins oder beide größer sind als AB.





3. Auch wenn C beliebig in der Ebene liegt, soll $AB+BC+CA=0$, $AB+BC=-CA=AC$ sein. AC heißt die geometrische Summe von AB und BC, AB und BC die geometrischen Summanden von AC.

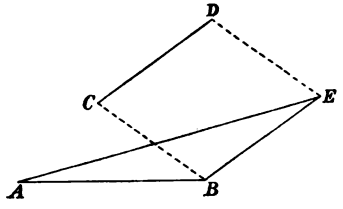
4. Strecken, welche gleiche Länge und gleiche Richtung haben, sind gleich, oder: Eine Strecke ändert durch Parallelverschiebung ihren Wert nicht.

An jeder Strecke (Vektor) unterscheidet man die Länge (absoluter Wert, Modul, Norm, Skalar) und die Richtung (Anomalie), d. h. den Winkel, welchen sie mit einer von ihrem Anfangspunkt in horizontaler Richtung nach rechts gezogenen Geraden bildet, und zwar im mathematisch positiven Sinn, d. h.

Digitized by Google

nach links oder gegen den Uhrzeiger, und zwar von der Horizontalen zur Strecke gedreht. Dieser Winkel kann spitz, stumpf, überspitz, überstumpf und, wenn die Strecke selbst horizontal ist, 360° sein. Daraus folgt, daß man zu dem kleinsten gefundenen Winkel α auch 360° bzw. $n \cdot 360°$ addieren darf.

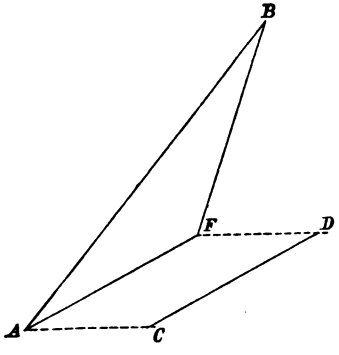
Eine Strecke AB hat die Länge $|AB|$ und den Winkel α, wenn $\sphericalangle \alpha = EAB$, wobei AE horizontal nach rechts gezogen ist. Ist OE seiner Länge nach 1 cm, horizontal von links nach rechts gezogen, also von der Anomalie 0°, 360°, 720°, so heißt OE die Einheitsstrecke oder kurz Einheit.

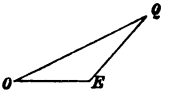


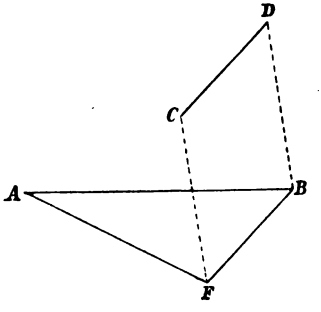
5. Zwei Strecken addiert man, indem man die zweite parallel so verschiebt, daß ihr Anfangspunkt auf den Endpunkt der ersten fällt und den Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkt der zweiten Strecke verbindet. Die verbindende Strecke ist die Summe. $AB + CD = AB + BE = AE$.

6. Eine Strecke subtrahiert man, indem man die Strecke in entgegengesetzter Richtung addiert.

$AB - CD = AB + DC = AB + BF = AF$.

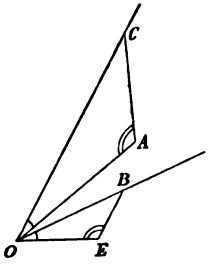






7. Eine Strecke dividiert man durch eine Strecke, indem man Dividendus und Divisor mit ihren Anfangspunkten aneinander schiebt, aus ihnen ein Dreieck bildet und ein ähnliches aus Quotient und Einheitsstrecke herstellt.

Da $\triangle BAF \sim QOE$ ist $BA : AF = QO : OE$ oder $AB : CD = OQ : 1$.



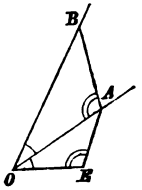
8. Eine Strecke multipliziert man mit einer Strecke, indem man aus der Einheitsstrecke und dem Multiplikator ein Dreieck herstellt und ein ähnliches aus dem Multiplikandus und dem Produkt bildet.

Die Strecken seien alle mit ihren Anfangspunkten aneinandergeschoben. Gesucht ist $OA \cdot OB$. Man zeichnet Dreieck OEB, trägt $\sphericalangle EOB$ an OA in O, $\sphericalangle BEO$ an OA in A an, die Schenkel der Winkel sollen sich in C schneiden, so ist OC das gesuchte Produkt.

Digitized by Google

Beweis. $\triangle COA \sim BOE$ nach Konstr. $\therefore CO : OA = BO : OE$, $CO \cdot OE = OA \cdot BO$, $OA \cdot OB = OC \cdot 1$.

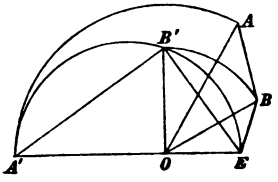
9. Eine Strecke quadriert man, indem man aus Einheit und Strecke ein Dreieck bildet und aus Strecke und Quadrat ein ähnliches formt.



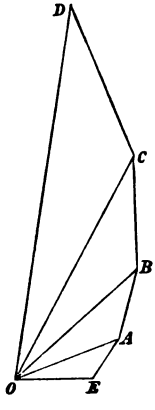
$$\triangle BOA \sim AOE \therefore BO : OA = AO : OE$$
$$OB \cdot 1 = OA \cdot OA.$$

10. Aus einer Strecke zieht man die Quadratwurzel, indem man aus Einheit und Strecke ein Dreieck bildet, den Winkel am Ausgangspunkt halbiert und auf ihm die mittlere geometrische Proportionale zwischen Einheit und Strecke abträgt.

Die mittlere geometrische Proportionale erhält man ihrer Länge nach als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenusenabschnitte die Einheit und die gegebene Strecke sind.



Versteht man unter $|OA|$ die Länge der Strecke ohne Rücksicht auf ihre Richtung, so ist $|OA'| = |OA|$, $|OB'| = |OB|$. $\triangle A'OB' \sim B'OE \therefore A'O : OB' = B'O : OE \therefore |OA| : |OB| = |OB| : |OE|$. Da $\sphericalangle AOE$ halbiert ist, ist Dreieck $AOB \sim BOE \therefore AO : OB = BO : OE \therefore OB = \sqrt{OA}$.



11. Eine Strecke potenziert man mit n, indem man an das aus Einheit und Strecke gebildete Dreieck nacheinander $n - 1$ ähnliche Dreiecke im positiven Drehungssinn (gegen den Uhrzeiger) anträgt. Das letzte Dreieck enthält als letzte von O ausgehende Strecke die Potenz.

Die Einheit heiße OE, die Strecke OA, die Potenzstrecke OP, so ist, wenn $\sphericalangle EOA = \alpha$, $\sphericalangle EOP = n\alpha$.

Da $|OE| : |OA| = |OA| : |OB| = |OB| : |OC| = \cdots = |OP_{-1}| : |OP|$ ist $|OB| = |OA|^2$, $|OC| = |OB| \cdot |OA| = |OA|^3 \cdots |OP| = |OA|^n$.

Z. B. für die 4. Potenz

$$\triangle EOA \sim AOB \sim BOC \sim COD \therefore OE : OA = OA : OB = OB : OC = OC : OD, \quad OD = OA^4.$$

12. Eine Strecke radiziert man durch n, indem man in den aus der Einheit und der Strecke gebildeten Winkel n ähnliche Dreiecke einträgt. Das OE zunächst liegende Dreieck enthält dann als zweite von O ausgehende Strecke die Wurzel.

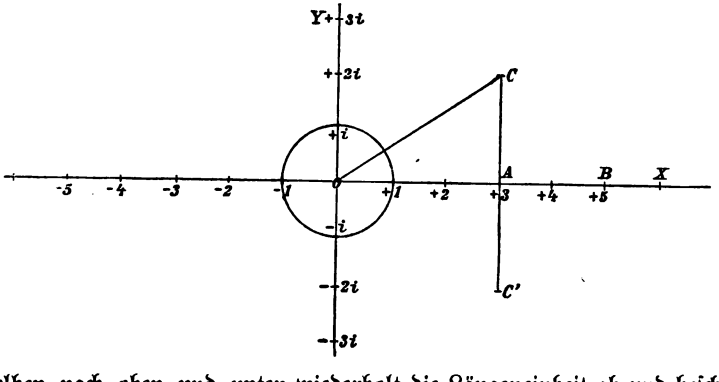
Diese Konstruktion ist im allgemeinen nur annähernd durch Probieren zu lösen. Soll die dritte Wurzel aus OC konstruiert werden, so ist der Winkel EOC in drei gleiche Teile zu teilen. Das ist mit Hilfe von Zirkel und Lineal (Kreis und gerader Linie) nicht absolut genau möglich. Hieraus erkennt man

Digitized by Google

den innigen Zusammenhang zweier Aufgaben, der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels, da letztere die $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren verlangt. Diese Aufgaben sind unter dem Namen Delisches Problem bekannt und von den griechischen Mathematikern mit Hilfe höherer Kurven gelöst, so von Hippias von Elis um 420 v. Chr. mit der Quadratrix, von Menächmus, einem Schüler Platons, um 350 v. Chr. mit Hilfe von Kegelschnitten. Schon Hippokrates von Chios, um 440 v. Chr., erkannte, daß die Aufgabe auf die Konstruktion zweier mittleren Proportionalen führte. Es soll ja $\triangle COB \sim BOA \sim AOE$ werden, es muß also $OC : OB = OB : OA = OA : OE$ sein, oder wenn man $|OC| = c$, $|OB| = y$, $|OA| = x$ setzt, $c : y = y : x = x : 1$, da dann $x = \sqrt[3]{c}$ oder $|OA| = \sqrt[3]{|OC|}$ ist (vgl. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik I, 270).

13. Radiziert man eine Strecke von der Länge eins, so ist nur der Winkel in n gleiche Teile zu teilen, da die Teildreiecke gleichschenklig sind und zwei Eckpunkte auf dem um O mit OE beschriebenen Kreise haben. Ist z. B. $|OC| = 1$, so ist auch $|OB|$ und $|OA|$ gleich eins. Von besonderer Wichtigkeit ist die Konstruktion $\sqrt{-1}$. Stellt OE die Zahl 1 dar, so ist nach (1) $OE + EO = 0$, also $EO = -1$. Verschiebt man EO um sich selbst, so daß $OE' = EO$, so stellt OE' die negative Einheit dar. Wie durch wiederholte Addition (4) von OE die positiven Zahlen, so werden durch wiederholte Addition von OE' die negativen Zahlen gebildet. Die Zahlengerade (§ 25) ist also nur ein spezieller Fall der Streckenrechnung. Halbiert man den gestreckten Winkel EOE' durch die Strecke OJ, und ist $|OJ| = 1$, so stellt OJ die Quadratwurzel aus OE' nach Länge und Richtung dar. Folglich ist $OJ = \sqrt{-1} = i$.

14. Jetzt ist man imstande, alle bisher vorgekommenen Zahlen auf zwei senkrechten Geraden durch ihren Abstand vom Nullpunkt darzustellen. Dazu errichte man auf der Zahlenlinie OX im Nullpunkte das Lot OY, trage auf

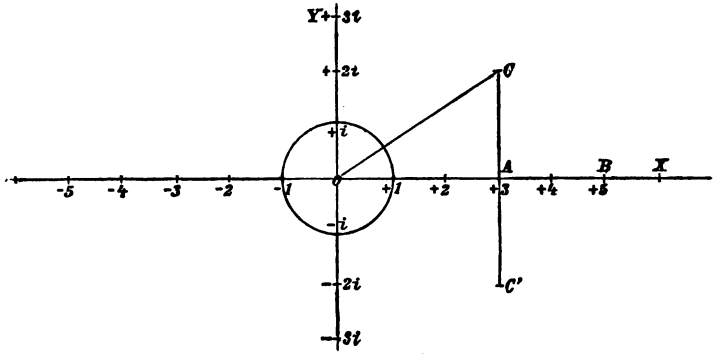


demselben nach oben und unten wiederholt die Längeneinheit ab und beschreibe um den Nullpunkt mit der Längeneinheit als Halbmesser den Kreis. Dann ist der lotrechte Halbmesser die mittlere Proportionale zu $(+1)$ und (-1), stellt also die imaginäre Einheit dar.

Digitized by Google

Die Abstände der oberen Teilpunkte vom Nullpunkte veranschaulichen die imaginären Zahlen i, 2i, 3i .., die Abstände der unteren Teilpunkte die imaginären Zahlen —i, — 2i, — 3i .., die Abstände der dazwischenliegenden Punkte vom Nullpunkte die gebrochenen und irrationalen imaginären Zahlen.

Die Linie OX heißt die Achse der reellen Werte, OY die der imaginären Werte, die Ebene YOX die Zahlenebene.



Die Längeneinheit bzw. die Strecke a gehen, wenn man sie um O links um 90° dreht, in i bzw. in ai über.

Geht man von der imaginären Einheit bzw. von der Strecke ai durch Weiterdrehen in demselben Sinne zu der auf ai im Anfangspunkte senkrechten Richtung über, so erhält man —1 und —a; es bestätigt sich daher $i \cdot i = i^2 = -1$, $ai \cdot i = ai^2 = -a$. Durch fortgesetzte Drehung erhält man wieder $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ usw.

B. Komplexe Zahlen.

§ 58.*

1. Nimmt man an, daß jeder Strecke der Zahlenebene eine Zahl entspricht, so genügt es, nach § 57, 3 die von O ausgehenden Strecken ihrem Zahlwert nach zu bestimmen. OC sei eine solche Strecke, CA das Lot von C auf OX, so ist nach § 57, 4: $OC = OA + AC$. In der Figur ist $OA = +3$, AC ist parallel und gleich der Strecke von O bis zu dem mit $+2i$ bezeichneten Punkte, also $AC = 2i$. Folglich ist $OC = 3 + 2i$. Wenn allgemein $OA = a$, $AB = b$, $|AC| = b$, $\sphericalangle BAC = 90°$, so ist $AC = bi$, also $OC = a + bi$. Ebenso ist $OC' = a - bi$. OC stellt also die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl dar.

2. **Erklärung.** Die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl heißt eine komplexe Zahl.

Jede komplexe Zahl wird durch eine Strecke dargestellt. Läßt man diese Strecke in O beginnen, so wird auch oft der Endpunkt der Strecke als ein Bild der Zahl angesehen. Die komplexe Zahl $-3-2i$ würde durch geometrische Addition (§ 57, 4) der Strecke —3, die horizontal nach links, und der Strecke —2i, die vertikal nach unten verläuft, dargestellt werden. Der Endpunkt von $-3-2i$ liegt also links unterhalb O.

Digitized by Google

3. **Erklärung.** Zwei komplexe Zahlen von der Form $a+bi$ und $a-bi$ heißen konjugiert komplexe Zahlen.

Die Verbindungslinie CC' ihrer Endpunkte steht auf der reellen Achse senkrecht und wird durch sie halbiert.

4. **Erklärung.** Zwei komplexe Zahlen heißen gleich, wenn sowohl ihre reellen als auch ihre imaginären Glieder gleich sind, und umgekehrt.

Aus $a+bi=a'+b'i$ folgt $a=a'$ und $b=b'$ und umgekehrt. (81)

Dies geht aus der Darstellung der Zahl als Strecke bzw. als Summe zweier Strecken (§ 57, 4) hervor.

5. Man kann auch die reellen Zahlen als komplexe Zahlen betrachten, deren imaginäres Glied den Koeffizient Null hat, es ist also $a=a+0\cdot i$, ebenso kann man die imaginären Zahlen durch die Null zu einer komplexen ergänzen: $bi=0+bi$. Ist deshalb $a+bi=a$, so ist $b=0$, ist $a+bi=bi$, so ist $a=0$, ist endlich $a+bi=0$, so ist sowohl a als auch b gleich 0.

6. Da man unter Gleichheit zweier komplexen Zahlen die Übereinstimmung sowohl des reellen wie des imaginären Teiles, d. h. sowohl der Länge wie der Richtung der die Zahlen darstellenden Strecken versteht, genügt die bloße Übereinstimmung in der Länge nicht zur Gleichheit, es darf daher auch der Begriff größer und kleiner nicht auf komplexe Zahlen übertragen werden, sondern man kann nur von einem Größer oder Kleiner ihrer absoluten Werte, d. s. die Längen der Strecken, sprechen. Da $|OC|^2=|OA|^2+|OB|^2$, ist $|OC|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}$, oder wenn $OC=a+bi$, ist $|OC|=\sqrt{a^2+b^2}$, wobei die Wurzel stets positiv bzw. absolut zu nehmen ist. Die absoluten Werte der positiven Zahlen stimmen danach mit diesen selbst überein. Es ist $+3=3+0i$, $|+3|=\sqrt{9+0}=3$. Die absoluten Werte der negativen Zahlen sind dem der entsprechenden positiven Zahlen gleich. $-3=-3+0i$ $|-3|=\sqrt{9+0}=3$. Wenn man also die Behauptung: $+3$ ist um 6 größer als -3, aufrecht erhalten will, so darf dies nur im rein reellen Zahlengebiet benutzt werden, da es außerhalb, d. h. allgemein nicht gilt. Bei Rechnungen mit Ungleichheiten wird man daher gut tun, vorsichtshalber stets nur mit absoluten Beträgen zu rechnen.

§ 59.*

Statt der Rechnung mit komplexen Zahlen soll überall die Streckenrechnung nach den Regeln des § 57 eintreten. Dadurch sind die Vertauschungs-, Verbindungs- und Verteilungsgesetze und alle wesentlichen Regeln für reelle Zahlen, soweit es sich um Gleichheit handelt, auf das Komplexgebiet übertragen.

Die algebraischen Ausdrücke ergeben sich nach diesen Regeln, wenn man $i^2=-1$ setzt.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \tag{82}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2 \tag{83}$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Digitized by Google

Summe und Produkt konjugiert komplexer Zahlen sind reell.

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Bei der Division kann man die Trennung in einen reellen und einen imaginären Teil dadurch bewirken, daß man mit der dem Divisor konjugierten Zahl erweitert:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \qquad (84)$$

§ 60.*

Die Länge $OC = \varrho$ (Fig. S. 86) heißt der Modul oder die Norm der komplexen Zahl $a + bi$; ihr absoluter Wert ist gleich dem positiven Wert von $\sqrt{a^2 + b^2}$; der Winkel (Anomalie), welchen sie mit der positiven Richtung der reellen Achse bildet, ist durch die Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

bestimmt, und es ist

$$a + bi = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \qquad (85)$$

Denkt man sich die reelle Strecke ϱ um den Anfangspunkt O um φ gedreht, so geht sie in $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ über; der Faktor $\cos \varphi + i \sin \varphi$ heißt der Richtungsfaktor oder die Richtungskonstante der komplexen Zahl für den gegebenen Winkel.

Lehrsatz 1. Das Produkt zweier komplexen Zahlen ist gleich derjenigen komplexen Zahl, deren Modul gleich dem Produkte der Moduln, und deren Richtungsfaktor durch die Summe der Winkel der Richtungsfaktoren der beiden komplexen Zahlen gebildet ist.

Voraussetzung. $a + bi = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $a' + b'i = \varrho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$.

Behauptung.

$$(a + bi)(a' + b'i) = \varrho\varrho' (\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')). \qquad (86)$$

Beweis. Durch Multiplikation der Gleichungen der Voraussetzung erhält man:

$$(a + bi)(a' + b'i) = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)\, \varrho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$
$$= \varrho\varrho' (\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' + i \sin \varphi \cos \varphi' + i \cos \varphi \sin \varphi')$$
$$= \varrho\varrho' (\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')).$$

Zusatz 1. Hieraus ergibt sich eine weitere Konstruktion (vgl. § 57, 8) der Strecke der Zahlenebene, welche dem Produkte zweier gegebenen komplexen Zahlen entspricht.

Digitized by Google

Man trage an die reelle Achse im Anfangspunkte die Summe der Winkel ihrer Richtungsfaktoren $\varphi + \varphi'$ an und mache den freien Schenkel gleich dem Produkte ihrer Moduln, so ist dieser die gesuchte Produkten-Strecke.

Lehrsatz 2. Der Quotient zweier komplexen Zahlen ist gleich derjenigen komplexen Zahl, deren Modul gleich dem Quotienten der Moduln, und deren Richtungsfaktor durch die Differenz der Winkel der Richtungskonstanten der komplexen Zahlen gebildet ist.

Voraussetzung. $a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$a' + b'i = \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$.

Behauptung. $$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')). \quad (87)$$

Beweis. $$\frac{a+bi}{a'+bi'} = \frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i'\sin\varphi')}{\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')).$$

Zusatz 2. Hieraus ergibt sich eine weitere Konstruktion (vgl. § 57, 9) der Strecke der Zahlenebene, welche dem Quotienten zweier komplexen Zahlen entspricht.

Man trage an die reelle Achse im Anfangspunkte die Differenz der Winkel ihrer Richtungsfaktoren $\varphi - \varphi'$ an, mache den freien Schenkel gleich dem Quotienten ihrer Moduln, so ist dieser die gesuchte Quotienten-Strecke.

§ 61.*

Die Regeln für die Potenzierung und Radizierung komplexer Zahlen ergeben sich aus der Streckenrechnung (§ 57, 9—12), wenn man sich auf reelle Exponenten beschränkt. Danach trat eine Potenzierung bzw. Radizierung der Streckenlänge (Modul) und eine Vervielfältigung bzw. Teilung des Winkels ein, also in algebraischer Bezeichnung

$$(a + bi)^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (88^*)$$
$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Der Beweis läßt sich aber auch algebraisch bzw. goniometrisch führen.

Der Satz, daß man statt eines Produktes seine Faktoren potenzieren kann, gelte auch für komplexe Zahlen, dann ist

$$(a + bi)^n = \varrho^n \cdot (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n,$$

nach § 60 L. 1 ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Ebenso ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\cdots\cdot(n\,\text{mal}) = \cos(\varphi+\varphi\cdots(n\,\text{mal})) + i\sin(\varphi+\varphi\cdots(n\,\text{mal}))$$
$$\therefore (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (88)$$

Digitized by Google

Daraus folgt der

Moivresche Lehrsatz. Die n^{te} Potenz der Richtungskonstante einer komplexen Zahl ist gleich der Richtungskonstante für den n fachen Winkel. 1730.)

Zieht man aus beiden Seiten die n^{te} Wurzel, so erhält man

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \sqrt[n]{\cos n\varphi + i\sin n\varphi},$$

setzt man $n\varphi = \alpha$, also $\varphi = \frac{\alpha}{n}$, so ergibt sich

$$\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n} = \sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha},$$

und wenn man wieder φ für α schreibt

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Hierdurch erfährt die Radizierung eine bemerkenswerte Erweiterung, wenn man das Permanenzgesetz der Operationen anwendet. Es war in § 57, 4 darauf hingewiesen worden, daß jede Strecke nicht nur eine Anomalie α, sondern beliebig viele Anomalien $\alpha + n\cdot 360^0$ hat. Jede komplexe Zahl läßt sich also entsprechend darstellen als

$$a + bi = \varrho\,(\cos(\varphi + n\cdot 360^0) + i\sin(\varphi + n\cdot 360^0)).$$

Insbesondere ist

$$1 = \cos(0 + k\cdot 360^0) + i\sin(0 + k\cdot 360^0)$$
$$-1 = \cos(180^0 + k\cdot 360^0) + i\sin(180^0 + k\cdot 360^0).$$

Wendet man hierauf den Moivreschen Satz an, so ist

$$\sqrt[n]{1} = \cos(0 + \frac{k}{n}\cdot 360^0) + i\cdot\sin(0 + \frac{k}{n}\cdot 360^0).$$

Wenn es auch beliebig viele Winkel $0 + \frac{k}{n}\cdot 360^0$ gibt, so ist die Zahl der Werte von $\sqrt[n]{1}$ beschränkt, da ja immer, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$\cos(\varphi + m\cdot 360^0) + i\sin(\varphi + m\cdot 360^0) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

dieselbe Strecke und damit dieselbe Zahl ergeben.

Man ersieht, daß es so viel verschiedene Werte von $\sqrt[n]{1}$ neben 1 gibt, als echte Brüche von der Form $\frac{k}{n}$ existieren.

Es sei $n = 5$, so sind die Winkel, wenn man der Reihe nach für k die Werte 1, 2 usw. einsetzt:

$$\frac{1}{5}\cdot 360^0,\quad \frac{2}{5}\cdot 360^0,\quad \frac{3}{5}\cdot 360^0,\quad \frac{4}{5}\cdot 360^0,$$

bildet man $0^0 + \frac{5}{5}\cdot 360^0$, so unterscheidet sich dieser Winkel nicht von 0^0, der Winkel $0^0 + \frac{6}{5}\cdot 360^0$ nicht von $0^0 + \frac{1}{5}\cdot 360$.

Die n^{te} Wurzel aus 1 und somit aus jeder Zahl ist n deutig.

Digitized by Google

Aufgabe. Die Kubikwurzeln der positiven Einheit zu finden. Man setzt $1 = \cos 0^0 + i \sin 0^0 = \cos 360^0 + i \sin 360^0 = \cos 720^0 + i \sin 720^0$ und zieht die dritten Wurzeln, indem man die Winkel drittelt:

$$\cos 0^0 + i \sin 0^0 = 1$$

$$\cos 120^0 + i \sin 120^0 = -\cos 60^0 + i \sin 60^0 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \quad (89)$$

$$\cos 240^0 + i \sin 240^0 = -\cos 60^0 - i \sin 60^0 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Die beiden komplexen Wurzeln sind konjugiert, bezeichnet man sie mit ε_1 und ε_2, so ist $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1^3 = 1$.

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot 3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Allgemein gilt der Satz: Ist $\varepsilon = \cos\frac{360^0}{n} + i \sin\frac{360^0}{n}$, so werden die sämtlichen Wurzeln der Einheit oder Einheitswurzeln durch die Potenzen ε^1, $\varepsilon^2 \cdots \varepsilon^n$ dargestellt.

Beweis. $\varepsilon^k = \left(\cos\frac{360^0}{n} + i\sin\frac{360^0}{n}\right)^k = \cos\frac{k}{n}\,360^0 + i \sin\frac{k}{n}\,360^0$, der rechts stehende Ausdruck ist aber die k^{te} Einheitswurzel.

Aus diesem Grunde beginnt man bei Aufstellung der Einheitswurzeln mit $\cos\frac{360}{n} + i \sin\frac{360}{n}$ und geht dann bis zu

$$\cos\frac{n \cdot 360^0}{n} + i \sin\frac{n\,360^0}{n} = \cos 360^0 + i \sin 360^0.$$

$$\sqrt[4]{1} = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = i$$

$$\varepsilon = i, \quad \varepsilon^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = -i, \quad \varepsilon^4 = 1.$$

Die n^{ten} Wurzeln einer beliebigen Zahl $a + bi$ erhält man aus den Einheitswurzeln

$$(a + bi) = (a + bi) \cdot 1$$

$$(a + bi) = \varrho \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360)$$

$$\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right) \cdot \left(\cos\frac{360}{n} + i \sin\frac{360}{n}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{360}{n}\right] + i \sin\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{360}{n}\right]\right).$$

Einen zweiten Wert erhält man durch Hinzufügen von $\frac{360}{n}$ zu dem Winkel. Fügt man ihn zu $\frac{\varphi}{n}$ oder zu $\frac{360^0}{n}$, so erhält man beide Male das nämliche

$$\sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0}{n} + \frac{360^0}{n}\right] + i \sin\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0}{n} + \frac{360^0}{n}\right]\right).$$

Digitized by Google

Man kann ihn also stets zu $\frac{360^0}{n}$ fügen. Fügt man ihn zu beiden, so erhält man die gleiche Zahl, wie wenn man $\frac{2}{n} \cdot 360^0$ zu $\frac{360^0}{n}$ fügte. Es ist also nun

$$\varepsilon = \cos\frac{360^0}{n} + i \sin\frac{360^0}{n}$$

$$\sqrt[n]{a+bi} = \varepsilon \cdot \sqrt[n]{\varrho} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

und man erhält die Werte von $\sqrt[n]{a+bi}$, wenn man ε der Reihe nach mit 1 bis n potenziert.

Folgerung. Jede n^{te} Wurzel aus einer reellen Zahl hat n Werte, die man findet, wenn man die positive n^{te} Wurzel des absoluten Wertes der Zahl mit den n^{ten} Wurzeln der positiven bzw. negativen Einheit multipliziert.

Beispiel 1. $x = \sqrt[3]{-1}$

$$-1 = 1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

$$\sqrt[3]{-1} = \varepsilon\,(\cos 60^0 + i \sin 60^0) = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}. \qquad (90)$$

Beispiel 2. $x = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3} \cdot i}, \quad \varrho = \sqrt{16 + 48} = 8$

$$4 + 4\sqrt{3} \cdot i = 8\,(\cos 60^0 + i \sin 60^0)$$

$$\sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3} \cdot i} = 2\varepsilon\,(\cos 20^0 + i \sin 20^0) = 2\varepsilon\,(0{,}34 + 0{,}94i),$$

$$2\varepsilon = -1 + 1{,}73i, \quad 2\varepsilon^2 = -1 - 1{,}73i, \quad 2\varepsilon^3 = 2,$$

$$x_1 = -1{,}97 - 0{,}35i; \quad x_2 = +1{,}29 - 1{,}53i; \quad x_3 = 0{,}68 + 1{,}88i.$$

Hieraus ersieht man auch, daß die Wurzeln komplexer Zahlen nicht wie die der reellen Zahlen paarweise konjugiert sind.

---

4. Kapitel. Anwendungen auf Polynome, insbesondere dekadische Zahlen.

A. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 62.

1. Wie ein Polynom, so kann auch jede dekadische Zahl, wenn man sie als ein nach fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom auffaßt, nach § 46 mit 2 potenziert werden. Das Quadrat der dekadischen Zahl $\overline{abcde}$ erhält man, indem man bildet:

$$a^2 \cdot 10^8 + 2ab \cdot 10^7 + b^2 \cdot 10^6 + 2 \cdot (10a + b)c \cdot 10^5 + c^2 \cdot 10^4 + 2(100a + 10b + c)\,d \cdot 10^3 + d^2 \cdot 10^2 + 2\,(1000a + 100b + 10c + d)e \cdot 10 + e^2.$$

Digitized by Google

Es ist daher, wenn man in der Ausführung die Potenzen von 10 wegläßt,

$$3456^2 = (3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6)^2 =$$

$$\begin{array}{rl} 9 \ldots\ldots & 3^2 \\ 24 \ldots\ldots & 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 16 \ldots\ldots & 4^2 \\ 340 \ldots\ldots & 2 \cdot 34 \cdot 5 \\ 25 \ldots\ldots & 5^2 \\ 4140 \ldots\ldots & 2 \cdot 345 \cdot 6 \\ 36 \ldots\ldots & 6^2 \\ \hline 11943936 & \end{array}$$

2. Um die Quadratwurzel aus einem Polynom zu finden, zieht man, nachdem es geordnet ist, die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede, subtrahiert das Quadrat der erhaltenen Größe a vom Polynom, hierauf dividiert man das zweite Glied des Polynoms durch 2a (der Quotient sei b), bildet $2ab + b^2$ und subtrahiert diese Summe; hierauf dividiert man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des zweiten Divisors $2a + 2b$ (der Quotient sei c), bildet $2(a + b)c + c^2$ und subtrahiert diese Summe; hierauf dividiert man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des dritten Divisors usw.

$$\sqrt{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2} = a + b + c$$

$$\begin{array}{lll} a^2 & & \\ \hline 2a \text{ in } & 2ab + 2ac + b^2 & \\ & 2ab \quad\; + b^2 & \\ \hline 2a + 2b \text{ in } & 2ac \quad\; + 2bc + c^2 & \\ & 2ac \quad\; + 2bc + c^2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

3. Um die Quadratwurzel aus einer dekadischen Zahl, z. B. $\sqrt{2834{,}4976}$, zu finden, teilt man die Zahl, von dem Komma anfangend, nach rechts und links in Gruppen von je zwei Stellen, wodurch die Zahl als ein nach geraden Potenzen von 10 fallendes Polynom dargestellt wird, und verfährt nach folgendem Schema:

$$\sqrt{28\,|\,34,\ 49\,|\,76} = 53{,}24$$

$$\begin{array}{rll} & 25 & \\ \hline a = 50 \therefore 2a = 100 \text{ in } & 334 & \\ (2a + b)b = 103 \cdot 3 = & 309 & \\ \hline 1060 \text{ in } & 2549 & \\ 1062 \cdot 2 = & 2124 & \\ \hline 10640 \text{ in } & 42576 & \\ 10644 \cdot 4 = & 42576 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Bleibt kein Rest, so ist die Wurzel rational und gefunden. Bleibt ein Rest, so ist die Wurzel irrational und liegt zwischen der gefundenen und der nächst größeren Zahl. Ist der Radikand eine genaue Zahl, so hängt man zur Fortsetzung des Radizierens Nullen an, ist er ungenau, so dividiert man ab-

Digitized by Google

gekürzt weiter. Dasselbe kann man auch im ersten Fall tun, sobald man die Hälfte der erforderlichen Ziffern hat. Z. B.

$$\sqrt{13} = 3{,}605551$$

	9
60 in	400
66	396
7200 in	40000
7205	36025
721 in	3975
	3605
72 in	370
	360
7 in	10
	7
	3

Die Wurzel aus einem echten Bruche ist kleiner als eins.

$$\sqrt{0{,}00\,|\,00\,|\,06\,|\,80} = 0{,}002607682$$

	4
40 in	280
46	276
5200 in	40000
5206	36449
521 in	3551
	3126
52 in	425
	416
5 in	9

Zusatz. Aus einem gemeinen Bruche zieht man die Quadratwurzel entweder, indem man Zähler und Nenner radiziert, oder indem man den Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt, oder indem man den Nenner durch Erweitern des Bruches in eine Quadratzahl verwandelt und den Zähler und Nenner radiziert, z. B.

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}; \quad \sqrt{\frac{13}{24}} = \sqrt{\frac{78}{144}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{78}; \quad \text{oder } \sqrt{\frac{13}{24}} = \sqrt{0{,}541667}.$$

B. Das Ausziehen der Kubikwurzel.

§ 63.

Wie ein Polynom, so kann auch jede dekadische Zahl, wenn man sie als ein nach fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellt, nach § 47 mit 3 potenziert werden.

Digitized by Google

Es ist daher, wenn man in der Ausführung die Potenzen von 10 wegläßt,

$$
\begin{array}{rl}
3406^3 = 27 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3^3 \\
108 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \cdot 3^2 \cdot 4 \\
144 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \cdot 3 \cdot 4^2 \\
64000 \ldots\ldots & 4^3 + 3 \cdot 34^2 \cdot 0 + 3 \cdot 34 \cdot 0^2 + 0^3 \\
2080800 \ldots\ldots & 3 \cdot 340^2 \cdot 6 \\
36720 \ldots\ldots & 3 \cdot 340 \cdot 6^2 \\
216 \ldots\ldots & 6^3 \\
\hline
39512447416 &
\end{array}
$$

Um die Kubikwurzel aus einem Polynom zu finden, zieht man, nachdem es geordnet ist, die Kubikwurzel aus dem ersten Gliede, subtrahiert den Kubus der erhaltenen Zahl a vom Polynom, dividiert dann das zweite Glied des Polynoms durch $3a^2$ — der Quotient sei b —, bildet $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ und subtrahiert diese Summe; hierauf dividiert man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des zweiten Divisors $3(a+b)^2$, der Quotient sei c; man bildet $3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$ und subtrahiert diese Summe.

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2 + c^3} = a + b + c$$

a^3

$3a^2$ in $3a^2b$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$3a^2 + 6ab + 3b^2$ in $+3a^2c + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c$

$+3a^2c + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

0

$$\sqrt{39\,|\,512{,}447\,|\,416} = 34{,}06$$

27

$a = 30$ $\quad 3a^2 = 2700$ in 12512

$b = 4$ $\quad$ 10800

$3ab = 360$ $\quad$ 1440

$b^2 = 16$ $\quad$ 64

$3(a+b)^2 = 3468$ in 2084

0

346800 in 2084474

2080800

$3 \cdot 340 \cdot 6 = 6120$ $\quad$ 36720

36 $\quad$ 216

0

Digitized by Google

5. Kapitel. Von den Logarithmen.

§ 64.

1. Da Basis und Exponent einer Potenz nicht vertauschbar sind, hat das Potenzieren zwei Umkehrungen, je nachdem eine Basis oder ein Exponent gesucht wird. Eine gesuchte Basis heißt Wurzel (§ 49), ein gesuchter Exponent heißt Logarithmus (wörtlich übersetzt: Zahl des Verhältnisses).

2. Wie das Radizieren dem Teilen, so entspricht das Logarithmieren dem Messen. $12:4$ kann als die Frage aufgefaßt werden: Wie oft kann man 4 von 12 subtrahieren, bis der Rest 0 bleibt. 64 durch 4 logarithmieren heißt: angeben, wie oft 64 durch 2 dividiert werden kann, bis der Quotient 1 ist. Es war $12-4-4-4=0$, $64:4:4:4=1$, also ist 3 der gesuchte Logarithmus. Ebenso ist $1000:10:10:10=1$, also 3 der Logarithmus der Zahl (Numerus) 1000 zur Basis 10.

3. Aus der Gleichung $1000:10^3=1$ folgt $1000=10^3$ und umgekehrt. Ist allgemein $a=b^m$, so ist $a:b^m=1$, d. h. a läßt sich m mal durch b dividieren, bis der Quotient 1 ist. Dies Ergebnis schreibt man ${}^b\log a=m$, und spricht: Logarithmus a zur Basis b ist m. a nennt man Numerus. Es entsprechen sich also folgende Bezeichnungen, wenn $a=b^m$:

	Potenzieren	Radizieren	Logarithmieren
a	Potenz*	Radikand	Numerus
b	Basis	Wurzel*	Basis
m	Exponent	Wurzelexponent	Logarithmus*
	$b^m=a^*$	$\sqrt[m]{a}=b^*$	${}^b\log a=m^*$

Der Stern bezeichnet die gesuchte Größe.

4. Die Basis 10 der Logarithmen wird fortgelassen, man schreibt also statt ${}^{10}\log 1000$ einfach $\log 1000$. Unzulässig ist die Abkürzung l für log, da l Logarithmus zur Basis 2,718 bedeutet. Dagegen finden beim Schreiben folgende Zeichen Verwendung:

$$\log 1000 = \lg 1000 = \underline{/1000}$$

Aus $1000=10^3$ und $\log 1000=3$ folgt

$$1000=10^{\log 1000}$$

$$a=10^{\log a}. \qquad (91)$$

Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit welchem die Basis potenziert werden muß, um die Zahl zu ergeben, oder der Logarithmus einer Zahl ist der ihr zugeordnete Exponent von 10, wenn man sich, wie im folgenden geschehen wird, auf diese Basis beschränkt.

5. Wie man nun von absoluten Exponenten zu negativen und gebrochenen weitergegangen ist, so treten auch negative und gebrochene Logarithmen auf.

Digitized by Google

Um nämlich Zahlen zu logarithmieren, welche kleiner als die Basis sind, führt man negative Logarithmen ein und versteht dann unter Logarithmus die Zahl, welche angibt, wie oft der Numerus durch den reziproken Wert der Basis dividiert werden muß, damit der letzte Quotient 1 ist.

$$\frac{1}{8}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1,\quad \frac{1}{8}:\left(\frac{1}{2}\right)^3=1,\quad \frac{1}{8}:2^{-3}=1,\quad \frac{1}{8}=2^{-3}$$

-3 ist der Logarithmus von $\frac{1}{8}$ zur Basis 2, $^2\log\frac{1}{8}=-3$

$$\frac{1}{1000}:\frac{1}{10}:\frac{1}{10}:\frac{1}{10}=1,\quad \frac{1}{1000}:\left(\frac{1}{10}\right)^3=1;\quad \frac{1}{1000}:10^{-3}=1,\quad \frac{1}{1000}=10^{-3}$$

Also ist -3 der Logarithmus von $\frac{1}{1000}$ zur Basis 10. $\log\frac{1}{1000}=-3.$

Da es unbequem ist, den Logarithmen ein negatives Vorzeichen hinzuzufügen, ist man übereingekommen, wenn die Basis 10 ist, den Numerus vor der Logarithmierung mit 10^{10} zu multiplizieren. Dadurch wird das Ergebnis um 10 zu groß, und man muß also von demselben 10 subtrahieren, kann diese 10 aber, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, fortlassen.

Es ist $\frac{1}{1000}\cdot 10^{10}=10^7,\quad \frac{1}{1000}=\frac{10^7}{10^{10}}=10^{7-10}$

$$\log\frac{1}{1000}=7-10,\quad \text{abgekürzt } \log\frac{1}{1000}=7.$$

6. Ist eine Zahl zu logarithmieren, welche keine Potenz der Basis oder ihres reziproken Wertes ist, so führt man gebrochene Logarithmen ein. Der Zähler des Bruches gibt an, wie oft der Numerus durch die vom Nenner bezeichnete Wurzel der Basis dividiert werden muß, um den Quotient 1 zu erhalten. Eine Zahl hat also den Logarithmus $\frac{3}{5}$ zur Basis 10, wenn sie dreimal durch $\sqrt[5]{10}$ zu dividieren ist, damit der Quotient 1 ist. Annähernd ist

$\sqrt[5]{10}=1{,}585,\quad 1{,}585^3=3{,}981,\quad 3{,}981:1{,}585:1{,}585:1{,}585=1,$

$3{,}981:1{,}585^3=3{,}981:\left(\sqrt[5]{10}\right)^3=3{,}981:10^{\frac{3}{5}}=1;\quad 3{,}981=10^{\frac{3}{5}},$

also $\log 3{,}981=\frac{3}{5}.$

Um das Dezimalsystem auch hier zu verwenden, schreibt man 0,6 statt $\frac{3}{5}$.

$\log 3{,}981=0{,}6$, weil $3{,}981:\left(\sqrt[10]{10}\right)^6=1,\quad \sqrt[10]{10}=1{,}259;\quad 3{,}981:1{,}259^6=1.$

7. Im allgemeinen wird sich aber der Logarithmus einer Zahl nicht durch einen rationalen Bruch ausdrücken lassen. Man verwendet deshalb von vornherein Dezimalbrüche, d. h. nachdem die Division durch 10 einen Quotienten ergeben hat, der zwischen 1 und 10 liegt, dividiert man diesen durch $\sqrt[10]{10}=1{,}259$, bis ein Quotient zwischen 1 und 1,259 übrig bleibt, diesen durch $\sqrt[100]{10}=1{,}023$, den nächsten durch $\sqrt[1000]{10}=1{,}0023.$

Digitized by Google

Ist z. B. der Logarithmus von 300 zu bestimmen, so findet man schrittweise

$$300 : 10^2 = 3; \quad 3 : 1{,}259^4 = 1{,}195; \quad 1{,}195 : 1{,}023^7 = 1{,}017;$$

$$1{,}017 : 1{,}0023^7 = 1{,}0003; \quad 300 : 10^2 : 10^{\frac{4}{10}} : 10^{\frac{7}{100}} : 10^{\frac{7}{1000}} = 1{,}0003.$$

Vernachlässigen wir die ohnehin ungenaue 3, so ist

$$300 : 10^{2{,}477} = 1; \quad 300 = 10^{2{,}477}, \quad \log 300 = 2{,}477.$$

Es ist ferner $3 : 10^{\frac{4}{10}} : 10^{\frac{7}{100}} : 10^{\frac{7}{1000}} = 3 : 10^{0{,}477} = 1$, also $\log 3 = 0{,}477$.

8. Die Art der Berechnung macht es wahrscheinlich, daß die Logarithmen nicht nur nicht rational, sondern auch nicht algebraisch-irrational sind. Der Beweis, daß sie transzendent-irrational sind, ist allerdings erst 1873 Hermite gelungen.

Der Logarithmus einer jeden endlichen absoluten Zahl läßt sich in jedem System, dessen Basis eine endliche absolute Zahl außer 1 ist, beliebig eng zwischen zwei Brüche einschließen. Er ist aber im allgemeinen weder durch eine rationale Zahl noch durch eine Wurzel (einer algebraischen Gleichung) ausdrückbar.

9. Ein zweiter Weg zur Berechnung der dekadischen Logarithmen liegt in der Eigentümlichkeit des Positionssystems. Die Zahl 10^3 wird mit 4 Ziffern, die Zahl 10^{1000} mit 1001 Ziffern, die Zahl $10^{1000 \cdot x}$ mit $x \cdot 1000 + 1$ Ziffer geschrieben. Ist nun $2 = 10^x$, so ist $2^{1000} = 10^{1000x}$. 2^{1000} wird also ebenfalls mit $x \cdot 1000 + 1$ Ziffern geschrieben. Ist a die Anzahl der Ziffern von 2^{1000}, so ist $x \cdot 1000 + 1 = a$, also $x = (a - 1) : 1000$. Allgemein: Ist a die Anzahl der Ziffern von z^n, so ist $\log z = (a - 1) : n$ mit beliebiger Annäherung.

Die Anzahl der Ziffern von 2^{1000} läßt sich durch wiederholte Multiplikation ermitteln. Das Verfahren ist langwierig aber sicher, man erhält 302 Ziffern, also ist $\log 2 = (302 - 1) : 1000 = 0{,}301$.

10. Endlich kann man durch wiederholte Potenzierung direkt den Exponenten von 10 bestimmen.

Berechnung von $\log 2$, wobei $\sim$ annähernd gleich bedeutet:

$$2^{10} = 1024 = 1000\left(1 + \frac{24}{1000}\right) \sim 10^3\left(1 + \frac{1}{40}\right)$$

$$2^{100} \sim 10^{30}\left(1 + \frac{1}{40}\right)^{10}, \text{ nach § 47 ist } \left(1 + x\right)^n \sim 1 + nx,$$

$$\text{also } \left(1 + \frac{1}{40}\right)^{10} \sim 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \quad \text{Demnach } 2^{100} \sim 10^{30} \cdot \frac{5}{4}$$

$$2^{1000} \sim 10^{300} \cdot \left(\frac{10}{8}\right)^{10}; \qquad \left(\frac{10}{8}\right)^{10} = \frac{10^{10}}{2^{30}} \sim \frac{10^{10}}{10^9} = 10,$$

$$2^{1000} \sim 10^{301} \therefore \log 2 = 0{,}301.$$

Berechnung von $\log 7$ (auf 2 Stellen):

$$7^2 = 49 \sim \frac{10^2}{2}; \quad 7^{20} \sim \frac{10^{20}}{2^{10}} \sim \frac{10^{20}}{10^3} = 10^{17}; \quad 7^{100} = 10^{85}; \quad \log 7 = 0{,}85.$$

Digitized by Google

Da ferner $1 = 10^0$, ist $\log 1 = 0$
$4 = 2^2 = 10^{0,602}$ ist $\log 4 = 0{,}602$
$5 = \frac{10}{2} = 10^{1-0,301}$ ist $\log 5 = 0{,}699$
$6 = 2 \cdot 3 = 10^{0,301} \cdot 10^{0,477}$ ist $\log 6 = 0{,}778$
$8 = 2^3 = 10^{0,903}$ ist $\log 8 = 0{,}903$
$9 = 3^2 = 10^{0,954}$ ist $\log 9 = 0{,}954$

Die 100fachen Logarithmen der ersten 10 Zahlen sind also
0, 30, 48, 60, 70, 78, 85, 90, 95, 100.

11. **Erklärung.** Unter einem „Logarithmischen System" versteht man den Inbegriff der Logarithmen aller Zahlen für dieselbe Grundzahl. Von allen möglichen Logarithmensystemen sind nur zwei im Gebrauche, nämlich das gemeine, dekadische oder Briggsche für die Grundzahl 10, welches sich vorzugsweise zu praktischer Rechnung eignet, und das für die später zur Behandlung kommende Reihenlehre wichtige natürliche oder Nepersche mit der Basis $e = 2{,}7182818\ldots$ Die gemeinen Logarithmen werden durch log vulg oder kurz log, die natürlichen Logarithmen durch log nat oder kurz durch l bezeichnet.

12. Geschichtliches. Die Logarithmen wurden von Deutschen erfunden und zuerst berechnet, nämlich von Michael Stifel 1544 und von Jost Bürgi 1611. Aber Bürgi veröffentlichte seine Tafeln erst 1620; so kamen ihm zwei Engländer zuvor: Neper 1614 und Briggs 1617. Bürgis Logarithmen stimmen nahezu mit den natürlichen überein, die mit weniger Recht Nepersche heißen als die dekadischen Briggsche (vgl. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik II, S. 141—186).

§ 65.

Die folgenden Sätze gelten auch für andere sonst zur Basis eines Logarithmensystems geeignete Grundzahlen. Hier genüge es, sie für dekadische Logarithmen auszusprechen und zu beweisen.

$$1.\ \log(ab) = \log a + \log b \tag{92}$$

$$2.\ \log\frac{a}{b} = \log a - \log b \tag{93}$$

$$3.\ \log(a^m) = m \cdot \log a \tag{94}$$

$$4.\ \log\sqrt[m]{a} = \tfrac{1}{m}\log a = \frac{\log a}{m}. \tag{95}$$

1. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren.

2. Der Logarithmus eines Bruches ist gleich der Differenz der Logarithmen des Zählers und Nenners.

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Logarithmus der Grundzahl und ihrem Exponenten.

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotient aus dem Logarithmus der Grundzahl durch ihren Exponenten.

Digitized by Google

Beweis. Die Beweise stützen sich auf die Lehrsätze über Potenzen (57) (58) (61) (75) und den Satz: Sind zwei Potenzen von gleicher absoluter bzw. positiver Basis gleich, so sind auch ihre Exponenten gleich. Dieser Satz gilt allerdings bisher nur von Potenzen mit rationalen Exponenten, wird nun aber wie auch obige 4 Sätze auf Potenzen mit irrationalen Exponenten übertragen (vgl. § 45 L. 8 und § 51 Erkl. 2). Ferner werden die Definitionsgleichungen benutzt:

$$a = 10^{\log a},\quad b = 10^{\log b},\quad ab = 10^{\log ab},\quad \frac{a}{b} = 10^{\log \frac{a}{b}}$$

1. $10^{\log ab} = ab = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$

2. $10^{\log \frac{a}{b}} = \frac{a}{b} = 10^{\log a} : 10^{\log b} = 10^{\log a - \log b}$

3. $10^{\log (a^n)} = a^n = (10^{\log a})^n = 10^{n \log a}$

4. $10^{\log \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = (10^{\log a})^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{1}{n} \log a}$

Anmerkung 1. Die 4 Regeln für Logarithmen lassen sich in eine zusammenfassen: Führt man eine Rechnung statt mit den Zahlen mit ihren Logarithmen aus, so erniedrigt sich die Rechnungsart um eine Stufe. D. h. es tritt an die Stelle der Multiplikation die Addition, der Division die Subtraktion, der Potenzierung die Multiplikation, der Radizierung die Division.

Anmerkung 2. Von einer Summe oder Differenz kann man den Logarithmus nur bestimmen, nachdem man die Summe oder Differenz ausgerechnet hat;

z. B. $$\log \frac{\sqrt[3]{125} + (1^3/_4)^2}{\sqrt{7}} = \log \frac{5 + {}^{49}/_{16}}{\sqrt{7}} = \log \frac{129}{16\sqrt{7}}$$

$$= \log 129 - \log 16 - \frac{1}{2} \log 7.$$

***Anmerkung 3.** Wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben sind und $a > b$ ist, so kann man mit Hilfe der Gaußschen oder Leonellischen Tafel die Logarithmen von $a + b$ und $a - b$ finden, ohne $a + b$ und $a - b$ zu berechnen. Man setzt

$$\log (b + a) = \log b \left(\frac{a}{b} + 1\right) = \log b + \log \left(\frac{a}{b} + 1\right) = \log b + B$$

und entnimmt B einer Tafel als zugeordnete Zahl eines $A = \log a - \log b$

$$\log (a - b) = \log b \left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log b + \log \left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log b + A$$

und entnimmt A derselben Tafel als zugeordnete Zahl eines $B = \log a - \log b$.

Im ersten Fall ist $\log \left(\frac{a}{b} + 1\right) = B$, $\log \frac{a}{b} = A$, also $\frac{a}{b} + 1 = 10^B$,

$$\frac{a}{b} = 10^A, \text{ folglich } 10^A + 1 = 10^B.$$

Digitized by Google

Im zweiten Fall ist $\log\left(\frac{a}{b}-1\right)=A$, $\log\frac{a}{b}=B$, also $\frac{a}{b}-1=10^A$,

$\frac{a}{b}=10^B$, folglich wieder $10^A+1=10^B$.

Diese Gleichung dient zur Berechnung von B aus A. Ist $A=0{,}602$, so ist $10^{0{,}602}=x$, $\log x=0{,}602$, $x=4$, $10^B=5$, $B=\log 5=0{,}699$, z. B. $\log a=1{,}079$, $\log b=0{,}477$, $A=0{,}602$, $\log(a+b)=0{,}477+0{,}699=1{,}176$.

§ 66.

Lehrsatz. Von einem Logarithmensystem geht man zu einem andern dadurch über, daß man die gegebenen Logarithmen mit dem Modul des neuen Systems multipliziert. Dieser Modul ist der reziproke Wert des Logarithmus der neuen Basis im alten System.

Behauptung. $$l\,a=\frac{1}{\log e}\cdot\log a. \qquad (96)$$

Beweis. $a=e^{la}$, $a=10^{\log a}$, folglich $e^{la}=10^{\log a}$.

Logarithmiert man beide Seiten nach 10, so ist

$l\,a\cdot\log e=\log a\cdot\log 10$, da $\log 10=1$ ist, also $l\,a=\frac{1}{\log e}\cdot\log a$.

$\frac{1}{\log e}\sim 2{,}3$. Man erhält also die natürlichen Logarithmen aus den dekadischen durch Multiplikation mit 2,3.

Man kann die Gleichung $e^{la}=10^{\log a}$ auch nach e logarithmieren und erhält $l\,a\cdot l\,e=\log a\cdot l\,10$, da $l\,e=1$ ist $\log a=\frac{1}{l\,10}\cdot l\,a$.

Diese Gleichung ist besonders wichtig, da man die natürlichen Logarithmen von allen positiven Zahlen durch eine Reihe (§ 139) berechnen und daraus die dekadischen finden kann.

§ 67.

Die folgenden Sätze können erst in der höheren Analysis begründet werden, sind aber aus den vorhergehenden Paragraphen verständlich, sobald man sich auf dekadische Logarithmen beschränkt.

1. Die Logarithmen sind transzendente Zahlen und nur für absolute Numeri definiert. Man kann also den Logarithmus einer relativen Zahl nicht angeben, sondern nur den ihres absoluten Wertes. Streng genommen kann man nicht den Logarithmus von $+3$ angeben, sondern nur den von 3. Man sagt aber, da die praktische Rechnung dadurch erleichtert wird, die Logarithmen einer Tafel sind die Logarithmen der positiven Zahlen. Der Logarithmus einer negativen Zahl ist nicht angebbar. Man kann aber den Logarithmus ihres absoluten Wertes bestimmen. Da $|-3|=3$, so ist $\log|-3|=\log 3=0{,}477$. Weniger korrekt aber praktisch ist die Schreibung $\log(-3)=0{,}477$ (n), wodurch man andeuten will, daß die Zahl, von welcher man den Logarithmus gesucht hat, negativ war. Bei der weiteren Rechnung kann man dies (n) mitführen, wenn man sich merkt, daß ein negativer Faktor das Produkt

Digitized by Google

negativ, zwei negative Faktoren das Produkt positiv machen. Tunlichst wird man aber negative Zahlen aus den zu logarithmierenden Ausdrücken entfernen.

2. Die Logarithmen aller Zahlen, die größer als 1 sind, sind positiv.

3. Die Logarithmen aller echten Brüche sind negativ.

4. Der Logarithmus von 1 ist 0.

5. Der Logarithmus von 0 ist negativ und sein absoluter Betrag größer als jede angebbare Zahl. Man schreibt wohl auch (nicht ganz korrekt) $\log 0 = -\infty$.

§ 68.

1. Die Logarithmen der Potenzen von 10 mit rationalen Exponenten sind gleich diesem Exponenten.

$$1000 = 10^3 \qquad \log 1000 = 3$$

$$\frac{1}{1000} = 10^{-3} \qquad \log \frac{1}{1000} = -3$$

$$\sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}} \qquad \log \sqrt[3]{10^2} = \frac{2}{3}$$

2. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen sind irrational, also durch einen endlichen Bruch nur annähernd angebbar.

3. Die Logarithmen dieser Zahlen werden als Dezimalzahlen geschrieben. Die Zahl vor dem Komma heißt Kennziffer oder Charakteristik, die Zahlen hinter dem Komma heißen Mantisse.

Die Logarithmentafeln enthalten nur die Mantissen, die also aus diesen zu entnehmen sind. Die Kennziffern sind zu bestimmen.

4. Jede Zahl läßt sich als Produkt einer Potenz von 10 und einer zwischen 1 und 10 liegenden Zahl darstellen. Der Exponent dieser Potenz ist die Kennziffer, die zwischen 1 und 10 liegende Zahl hat eine zwischen Null und Eins liegende Zahl zum Logarithmus, die aus Null Einern und der Mantisse als Dezimalstellen besteht.

$$300 = 3 \cdot 10^2; \quad \log 300 = \log 3 + \log 10^2 = 0{,}477 + 2$$

$$0{,}003 = \frac{3}{1000} = 3 \cdot 10^{-3}, \quad \log 0{,}003 = \log 3 + \log 10^{-3} = 0{,}477 - 3$$

Die positive Kennziffer addiert man zur Mantisse, die negative erhöht man auf 10 und addiert die hierbei erforderliche Ergänzung zur Mantisse

$\log 300 = 2{,}477$

$$\log 0{,}003 = 0{,}477 - 3 = 0{,}477 + 7 - 3 - 7 = 7{,}477 - 10.$$

Man multipliziert also den Bruch mit 10^{10}, bestimmt den Logarithmus dieser Zahl und subtrahiert 10 von demselben. Es ist

$$0{,}003 \cdot 10^{10} = 30\,000\,000; \quad \log 30\,000\,000 = 7{,}477$$

$$\log 0{,}003 = 7{,}477 - 10.$$

Den Subtrahendus -10 kann man fortlassen, wenn kein Mißverständnis entstehen kann.

Digitized by Google

Für die Bestimmung der Kennziffer ergeben sich danach folgende praktische Regeln:

Die Kennziffer einer ganzen Zahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern (vor dem Komma).

Die Kennziffer eines echten Bruches ist entweder negativ und gleich der Anzahl der Nullen, die vor der ersten geltenden Ziffer stehen, oder positiv gleich der Ergänzung der Nullenanzahl zu 10, unter nachträglicher Verminderung um 10.

$\log 54321 = 4, \ldots \quad \log 0{,}0007 = 0, \ldots - 4 = 6, \ldots - 10.$

Bezeichnet man den Stellenwert der Einer mit 10, den der Zehner mit 11, der Hunderter mit 12, der Zehntel mit 9, der Hundertstel mit 8, so ist die Kennziffer gleich dem Stellenwert der ersten geltenden Ziffer vermindert um 10

$$\log \overset{12}{2}\,\overset{11}{3}\,\overset{10}{4}{,}\overset{9}{5} = 12, \ldots - 10$$

$$\log 0{,}\overset{10}{0}\,\overset{9}{0}\,\overset{8}{3}\,\overset{7}{7}\,\overset{6}{=} \; 7, \ldots - 10$$

5. Aus der Kennziffer bestimmt man den Stellenwert des zu einem gegebenen Logarithmus gefundenen Numerus durch ein dem in 4 gezeigten entgegengesetztes Verfahren.

Ist die Kennziffer Null, so hat der Numerus eine Stelle vor dem Komma.

Ist die Kennziffer $+k$, so hat der Numerus $k+1$ Stellen vor dem Komma.

Ist die Kennziffer $k-10$, so hat der Numerus $10-k$ Nullen vor der ersten geltenden Ziffer (einschließlich der Null in der Einerstelle)

$0{,}477 = \log 3; \quad 3{,}477 = \log 3000; \quad 6{,}477 - 10 = \log 0{,}0003.$

6. Zwei Zahlen, die mit denselben Ziffern, abgesehen von Nullen, geschrieben werden, haben dieselbe Mantisse und umgekehrt.

$\log 8670 = 3{,}938 \qquad \log 0{,}0867 = 8{,}938 - 10$

$1{,}683 = \log 48{,}2 \qquad 9{,}683 = \log 0{,}482.$

§ 69.

1. Je nachdem die Mantissen auf 4, 5, 6, 7, 10 Stellen in einer Tafel angegeben sind, bezeichnet man die Tafel als vierstellig, fünfstellig usw.

Wie die Mantissen berechnet werden können, ist in § 64 gezeigt, sie sind aber nicht auf diesem Wege sondern durch Reihen (§ 140) berechnet worden.

Für die Schule sind vierstellige Tafeln ausreichend und deshalb zweckmäßiger als fünfstellige. Da aber noch überwiegend fünfstellige in Gebrauch sind, sollen die Regeln für solche formuliert werden. Sie lassen sich sinngemäß auf vierstellige und siebenstellige übertragen.

Digitized by Google

2. In den fünfstelligen Tafeln sind die Mantissen vierstelliger Numeri auf fünf Stellen angegeben. Meist stehen in der ersten mit N überschriebenen Staffel links drei Ziffern des Numerus, die vierte ist in der Überschriftszeile zu suchen. Die Mantisse ist in zwei Teile gespalten, die ersten zwei Ziffern stehen in der zweiten, oft mit L überschriebenen Staffel; die drei folgenden Ziffern stehen senkrecht unter der vierten Numerusziffer.

N	L	0	1	2	3	4	5
317	50	106	120	133	147	161	174

Es ist log 3170 = 3,50106, log 3171 = 3,50120, log 3172 = 3,50133 usw. Die zwei ersten Mantissenziffern sind also aus der Staffel L zu ergänzen, und zwar, wenn ein Stern vor den drei letzten Ziffern steht, aus der nächsten Zeile.

3. Kennt man log 3172, so kann man durch Änderung der Kennziffer den Logarithmus jeder mit diesen 4 Ziffern geschriebenen Zahl bestimmen. Es ist log 317200 = 5,50133, log 0,03172 = 8,50133 — 10. Will man den Logarithmus eines fünfziffrigen Numerus bestimmen, so muß man sich zwischen je zwei aufeinanderfolgende Mantissen neun Mantissen in annähernd gleichen Abständen eingeschoben (interpoliert) denken. Es ist log 31730 = 4,50147, log 31740 = 4,50161. Wächst der Numerus von 30 auf 40, also um 10, so wächst die Mantisse von 47 auf 61, also um 14.

Wächst der Numerus um 1, also den 10. Teil, so wird auch der Logarithmus um den 10. Teil, d. h. $\frac{14}{10} = 1{,}4$ wachsen, d. h. rund um 1 in der letzten Stelle der Mantisse. Wächst der Numerus um 2, so wächst die letzte Stelle der Mantisse um $2 \cdot \frac{14}{10} = 2{,}8$, also rund um 3 usw. Es ist also

log 31731 = 4,50148
log 31732 = 4,50150
log 31733 = 4,50151
log 31734 = 4,50153
. . . . . .
log 31739 = 4,50160
log 31740 = 4,50161

4. Ist die Differenz zweier Mantissen größer, so kann man auch noch für eine sechste Numerusstelle interpolieren. Es ist

log 131400 = 5,11860, log 131500 = 5,11893.

Der Numerusdifferenz ($\triangle$N) 100 entspricht die Mantissendifferenz ($\triangle$M) 33, dem $\triangle N = 1$ ein $\triangle M = 0{,}33$, einem $\triangle N = 46$ ein $\triangle M = 0{,}33 \cdot 46 = 15{,}18$, also ist log 131446 = 5,11875. In der Tafel ist unter PP (partes proportionales) eine Multiplikation aufgeführt, die diese Rechnung erleichtert.

5. Das Interpolationsverfahren stützt sich auf 2 Lehrsätze.

Digitized by Google

Lehrsatz 1. Der Unterschied der Logarithmen zweier aufeinander folgenden Zahlen a und $a+1$ ist um so kleiner, je größer die Zahlen sind.

Beweis. Es ist $\log(a+1) - \log a = \log \frac{a+1}{a} = \log\left(1+\frac{1}{a}\right)$ also gleich dem Logarithmus einer Zahl, die um so kleiner wird, je größer a ist.

Lehrsatz 2. Die beiden Differenzen aus den Logarithmen je dreier aufeinander folgenden fünfziffrigen Zahlen $a-1$, a und $a+1$ sind für fünfstellige Logarithmen als einander gleich anzunehmen.

Beweis. Es ist $d_1 = \log a - \log(a-1) = \log \frac{a}{a-1}$,

$$d_2 = \log(a+1) - \log a = \log \frac{a+1}{a}, \text{ folglich}$$

$$d_1 - d_2 = \log \frac{a}{a-1} - \log \frac{a+1}{a} = \log \frac{a^2}{a^2-1}$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \cdots\right).$$

Der kleinste Wert, welchen a als fünfstellige Zahl annehmen kann, ist 10001; wenn dafür der einfacheren Rechnung wegen 10000 gesetzt wird, so folgt

$$d_1 - d_2 = \log 1{,}000000\,010000000\,100\cdots$$
$$d_1 = d_2 + 0{,}0000004$$

Es können also für fünfstellige Logarithmen die Differenzen je dreier aufeinander folgenden Zahlen als gleich angenommen werden.

Folgerung. Um für eine fünfziffrige Zahl den Logarithmus zu finden, sucht man die Mantisse für die aus den 4 ersten Ziffern gebildete Zahl auf und addiert für jede Einheit der fünften Stelle $^1/_{10}$ der zugehörigen Mantissendifferenz.

6. Ist eine Mantisse nicht genau in der Tafel enthalten, so nimmt man die nächst niedrige Mantisse und findet weitere Stellen des Numerus durch Division.

num 5,11888 = x
num 5,11860 = 131400
28 : 33 = 0,85
26,4
16

num 511888 = 131485.

log 131400 = 5,11860
log 131500 = 5,11893
33

§ 70.

Die beiden Aufgaben, welche man mittels der Logarithmentafeln löst, nämlich

1. zu einer gegebenen Zahl (Numerus) den Logarithmus und

2. zu dem gegebenen Logarithmus ihren Numerus aufzusuchen,

kommen vereint zur Anwendung, um

3. einen mittels verschiedener Rechnungsarten zusammengesetzten Zahlenausdruck zu berechnen. Man setzt dazu den Ausdruck gleich x, bildet unter

Digitized by Google

Anwendung der Sätze von § 65 log x, berechnet denselben und sucht den zugehörigen Numerus auf, wobei die „Hilfen“ (s. u.) zu berücksichtigen sind.

$$x = \sqrt[5]{\frac{0{,}084 \cdot 0{,}09^3}{9{,}3045 \cdot \sqrt{0{,}849}}} = \sqrt[5]{\frac{z}{n}};\ \log x = \frac{1}{5}(\log z - \log n) =$$

$$\frac{1}{5}\left[\log 0{,}084 + 3\log 0{,}09 - \left(\log 9{,}3045 + \frac{1}{2}\log 0{,}849\right)\right]$$

Zur Ausrechnung empfiehlt sich folgendes Schema.

Num	Log	Op
0,09	8,95424	· 3
$0{,}09^3$	6,86272	+
0,084	8,92428	+
z	5,78700	+
n	0,93314	−
x^5	44,85386	: 5
x	8,97077	

Num	Log	Op
0,849	19,92891	: 2
$\sqrt{0{,}849}$	9,86445	+
9,3045	0,96869	+
n	0,93314	

$x = 0{,}09349$

Hierbei sind folgende Hilfen benutzt:

Die Kennziffer echter Brüche ist um 10 vermindert zu denken; diese 10 muß vor dem Ausziehen der Quadratwurzel auf 20, vor dem Ausziehen der 5. Wurzel auf 50 erhöht werden. Demnach ist zur Kennziffer vor der Mantisse 10 bzw. 40 zu addieren. Anfänger können auch das in Anm. 2 verwendete Verfahren benutzen.

Anmerkung 1. Bei negativen Zahlen hat man den Faktor (− 1), bei imaginären den Faktor $\sqrt{-1}$ abzusondern und den zweiten Faktor logarithmisch zu berechnen.

$$x = 3\sqrt[5]{-2{,}8408}\sqrt{-11} = -i \cdot 3\sqrt[5]{2{,}8408}\sqrt{11}.$$

$$\log\left(3\sqrt[5]{2{,}8408} \cdot \sqrt{11}\right) = 1{,}08851,$$

$$3\sqrt[5]{2{,}8408}\sqrt{11} = 12{,}261,\ x = -12{,}261\sqrt{-1}.$$

Anmerkung 2. Hat man den Logarithmus eines Bruches durch einen mehrzifferigen Dezimalbruch zu dividieren, so verwandelt man die Differenz in eine negative Zahl.

$$x = \sqrt[7{,}0017]{0{,}791},\ \log x = \frac{0{,}89818 - 1}{7{,}0017} = -\frac{0{,}10182}{7{,}0017}$$

$$y = \frac{0{,}10182}{7{,}0017},\ \log y = \log 0{,}10182 - \log 7{,}0017.$$

$$\log 0{,}10182 = {}^{1}0{,}00783 - {}^{2}1$$
$$\log 7{,}0017 = \ 0{,}84520$$
$$\log y = \ 0{,}16263 - 2,\quad y = 0{,}014542.$$
$$\log x = -y = -0{,}01454 = 0{,}98546 - 1,$$
$$x = 0{,}96707.$$

Digitized by Google

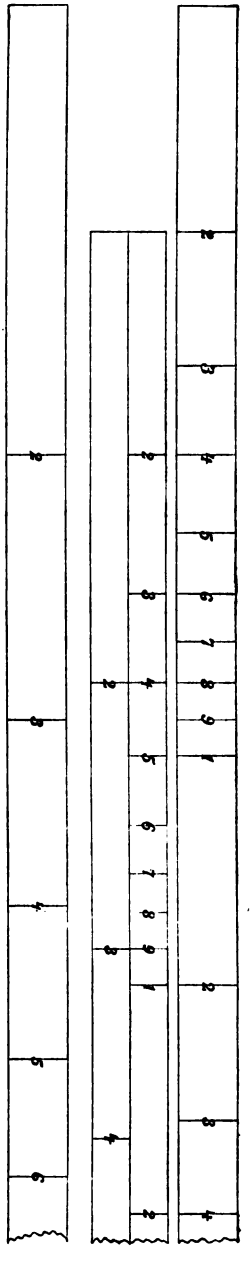
Anmerkung 3. Hinsichtlich der vorkommenden Differenzen und Summen vergleiche § 65, A. 2.

$$x = \sqrt{25{,}08^{\frac{1}{3}} - 3\sqrt[5]{0{,}0872}} = \sqrt{y - z}$$

$$\log y = \tfrac{1}{3}\log 25{,}08;\quad \log z = \log 3 + \tfrac{1}{5}\log 0{,}0872$$

Litt	Num	Log	Op
	25,08	1,39933	: 3
y	2,9271	0,46644	
	0,0872	48,94052	: 5
	$\sqrt[5]{0{,}0872}$	9,78810	+
	3	0,47712	+
z	1,8417	0,26522	−
y	2,9271		+
y − z	1,0854	0,03559	: 2
x	1,0418	0,01780	

*7. Ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zu rascher Berechnung ist der Rechenstab, von welchem ein Teil nebenstehend abgebildet ist. Schreibt man an einen in mm geteilten Stab die Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1 an die vom Anfang der oberen Skala gemessenen Teilpunkte 30, 48, 60, 70, 78, 85, 90, 95, 100, und teilt man die unterste Skala im doppelten Maßstab, so stehen unten die Quadratwurzeln aus den darüber stehenden Zahlen. In dem Stab ist beweglich ein Schieber mit gleicher Einteilung geschoben. In der Figur ist er so gestellt, daß jede Ziffer des Schiebers halb so groß als die darüber stehende Ziffer ist. Multiplikation wird durch Addition, Division durch Subtraktion von Strecken ersetzt. Eine nähere Anweisung wird den Rechenstäben beigegeben.



Fünfter Abschnitt.

Von den Bestimmungsgleichungen.

1. Kapitel. Einleitung.

§ 71.

Erklärung. Unter einer Gleichung versteht man die Verbindung zweier Größen durch das Gleichheitszeichen. Die beiden Größen heißen die Seiten der Gleichung, die rechte und linke.

Die Gleichungen zerfallen in identische und Bestimmungsgleichungen. Eine identische Gleichung ist eine solche, deren Seiten auf Grund der Rechengesetze notwendig einander gleich sind. Sie gilt für alle Werte der in ihr vorkommenden allgemeinen Größen. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Die Lehre von den identischen Gleichungen heißt Arithmetik.

Eine Gleichung, deren Seiten nicht notwendig gleich sind, sondern nur willkürlich gleich gesetzt werden, z. B.

$$7a + 2x = 5b, \quad a^2 + b^2 = x^2,$$

stellt zunächst nur die Abhängigkeit mehrerer Zahlen voneinander dar und heißt als solche analytische Gleichung. Erteilt man aber den Buchstaben a und b bestimmte Zahlwerte, so erhält auch x, wenn anders die Gleichung richtig bleiben soll, einen (oder mehrere) bestimmte Werte. Solche Gleichungen nennt man Bestimmungsgleichungen, z. B. $5x = 15$.

Setzt man in der ersten der obigen Gleichungen $a = 2$, $b = 4$, so muß man $x = 3$ setzen, damit jede Seite gleich 20 wird. Die zweite Gleichung stellt die Abhängigkeit der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks voneinander dar. Ist $a = 3$, $b = 4$, so ist $x = 5$ zu nehmen.

Eine Bestimmungsgleichung muß mindestens eine unbestimmte Größe enthalten, welche durch die anderen bestimmt wird. Man nennt diese Größe im Gegensatze zu den anderen „bekannten Größen" die unbekannte Größe und bezeichnet sie gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets.

Die Bestimmungsgleichungen dienen dazu, aus bekannten Größen unbekannte zu bestimmen. Jeder bestimmte Wert, welcher, an Stelle der unbekannten Größe in die Gleichung eingetragen, diese zu einer identischen macht, d. h. der Gleichung genügt, heißt eine Wurzel der Gleichung. Diesen Wert finden heißt „die Gleichung auflösen".

Gleichungen, welche außer der Unbekannten keine Buchstaben, sondern nur Zahlen enthalten, heißen numerische oder Zahlengleichungen; Gleichungen, welche außer der Unbekannten andere Buchstaben enthalten, Buchstabengleichungen.

Digitized by Google

Im übertragenen Sinn spricht man auch von Wortgleichungen oder Textgleichungen und versteht darunter eine in Worten gegebene Aufgabe, deren Lösung durch eine Gleichung gesucht wird.

Eine Gleichung, deren unbekannte Größe nur als Grundzahl von Potenzen oder im Radikanden von Wurzeln vorkommt, heißt eine algebraische Gleichung, eine Gleichung, welche die Unbekannte in Exponenten einer Potenz oder Wurzel enthält, wird eine Exponentialgleichung genannt und gehört zu den transzendenten Gleichungen.

Gleichungen zu lösen verstand schon der Ägypter Ahmes (XVII. Jahrh. v. Chr.). Unter den Griechen ist besonders Diophant (IV. Jahrh. n. Chr.) zu nennen. Das arabische Lehrbuch des Muhamed Alchwarizmi (820 n. Chr.) Aldschebr walmukabala (restauratio et oppositio) hat die Bezeichnung Algebra für die Lehre von den Bestimmungsgleichungen veranlaßt. Unsere heutige Behandlung der Gleichungen geht auf Stifel (1544 Eßlingen) zurück.

§ 72.

Die Auflösung der Gleichungen beruht auf dem Satze:

Gleiche Rechnungen, mit gleichen Größen vorgenommen, geben gleiche Ergebnisse, oder: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man mit beiden Seiten dieselben Rechnungen vornimmt.

Hieraus ergeben sich die nachstehenden Folgerungen:

1. Gleiche Glieder, welche auf verschiedenen Seiten mit demselben Vorzeichen stehen, heben sich gegeneinander auf, die positiven durch Subtraktion, die negativen durch Addition ihrer absoluten Werte auf beiden Seiten.

2. Jedes Glied darf man mit umgekehrtem Vorzeichen auf die andere Seite setzen (Transposition der Glieder). Für die positiven Glieder ergibt sich die Richtigkeit durch Subtraktion, für die negativen Glieder durch Addition der absoluten Werte auf beiden Seiten.

3. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man die Vorzeichen sämtlicher Glieder in die entgegengesetzten verwandelt. Die Richtigkeit ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung mit -1.

4. Haben alle Glieder einen gemeinsamen Faktor oder Divisor, so fällt letzterer durch Multiplikation der Gleichung mit dem Divisor, ersterer durch Division mit dem Faktor fort.

§ 73.

Erklärung. Eine Gleichung heißt auf ihre allgemeine Form oder auf Null gebracht, wenn sämtliche Glieder, nach fallenden Potenzen der Unbekannten geordnet, auf der einen Seite stehen, ihre algebraische Summe also gleich Null ist. Die algebraischen Gleichungen unterscheidet man nach der höchsten Potenz der Unbekannten in Gleichungen des ersten Grades (lineare Gleichungen), Gleichungen des zweiten Grades (quadratische), Gleichungen des dritten Grades (kubische).

Digitized by Google

Die allgemeine Form der linearen Gleichungen ist: $ax + b = 0$, die der quadratischen Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, die der kubischen Gleichungen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Um eine Gleichung auf ihre allgemeine Form zu bringen, führt man nacheinander folgende Umformungen aus:

1. Man schafft die Nenner fort, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

2. Man löst die Klammern auf, in welchen die Unbekannte vorkommt.

3. Man entfernt die Wurzeln, in denen die Unbekannte vorkommt, indem man die zu beseitigende Wurzel von allen übrigen Gliedern durch Transposition trennt (isoliert) und beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenziert; man wiederholt dies, wenn mehrere Wurzeln vorhanden sind (vgl. § 74, Beisp. 2).

4. Man bringt durch Transposition alle Glieder auf die eine Seite und ordnet sie nach fallenden Potenzen der Unbekannten.

5. Zwischen je zwei Umformungen untersucht man, ob die Gleichung durch Anwendung der Regeln des § 72 sich vereinfachen läßt.

Anmerkung. Bringt man in der allgemeinen Form einer Gleichung das bekannte Glied auf die andere Seite, so heißt die erhaltene Form der Gleichung ihre Normalform.

---

2. Kapitel. Von den Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

A. Auflösung derselben.

§ 74.

Gelangt man durch die im vorigen Paragraphen angegebenen Umformungen auf die allgemeine Form der linearen Gleichungen

$$ax + b = 0,$$

so ergibt sich aus derselben durch Transposition von b und durch Division mit dem Koeffizienten der Unbekannten:

$$ax = -b,\quad x = -\frac{b}{a}. \tag{97}$$

Es gibt nur diesen einen Wert von x, welcher der Gleichung $ax + b = 0$ genügt; denn gäbe es noch einen zweiten x', so müßte auch $ax' + b = 0$ oder, wenn man diese von der obigen subtrahiert, $a(x - x') = 0$ sein, woraus die Gleichheit von x und x' folgen würde.

Beispiel 1. $$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3xc + \frac{bx}{a}.$$

Auflösung. Multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner $a(a+b)^3$, bringt die Glieder, welche die Unbekannte als Faktor enthalten, auf eine Seite, so erhält man

$$3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2 = 3acx(a+b)^3 + bx(a+b)^3 - (2a+b)b^2(a+b)x$$

Digitized by Google

oder, wenn man die gemeinsamen Faktoren absondert,

$$a^2 b[3c(a+b)^2+ab] = x(a+b)[3(a+b)^2 ac + b(a+b)^2 - (2a+b)b^2]$$

und, wenn man in den beiden letzten Gliedern der Klammern rechts die Multiplikationen ausführt und hebt,

$$a^2 b[3c(a+b)^2+ab] = x(a+b)\ [3(a+b)^2 ac + a^2 b];$$

folglich $x = \dfrac{ab[3c(a+b)^2+ab]}{(a+b)a[3c(a+b)^2+ab]} = \dfrac{ab}{a+b}.$

Beispiel 2. $2\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b} = \sqrt{9x+4a-5b}.$

Auflösung. Quadriert man die Gleichung, hebt und isoliert die dabei sich ergebende Wurzel von den übrigen Gliedern, so erhält man:

$$4x+4a+x-b+4\sqrt{(x+a)(x-b)} = 9x+4a-5b,$$

$$4\sqrt{(x+a)(x-b)} = 4x-4b,$$

$$\sqrt{(x+a)(x-b)} = x-b$$

und, wenn man nochmals quadriert, hebt und ordnet,

$$x^2+ax-bx-ab = x^2-2bx+b^2,$$

folglich $$x = \frac{b(a+b)}{a+b} = b.$$

Anmerkung. Irrationale Gleichungen, wie Beispiel 2 eine bietet, sind stets höheren Grades. Die hier gefundene Lösung ist nur eine, freilich die einzige endliche.

B. Auflösung der in Worten gegebenen Gleichungen durch die analytische Methode.

§ 75.

Die Gleichungen werden angewendet, um aus einer in Worten gegebenen, mehr oder weniger zusammengesetzten Verknüpfung mehrerer Größen miteinander die eine durch die anderen auszudrücken. Zur Bildung der Gleichung aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe dienen folgende Regeln:

1. Man ermittele die Unbekannte und bezeichne sie mit einem der drei letzten Buchstaben des Alphabets.

2. Man suche die beiden Größen auf, welche einander gleich gesetzt werden oder in einer gewissen Beziehung stehen sollen. (Nexus der Aufgabe.)

3. Man suche diese Größen mathematisch darzustellen und drücke dazu die Beziehungen zwischen den Größen der Aufgabe, welche in ihr in Worten gegeben sind, mittels der bekannten und unbekannten Größen durch mathematische Zeichen aus. Hierbei ist zu beachten, daß man die Unbekannte ebenso in Rechnung zieht, als wäre sie bekannt, und daß alle gleichartigen Größen gleichnamig zu machen sind. (Bestimmung der gleich zu setzenden Größen.)

Digitized by Google

4. Man setze die so bestimmten Größen einander gleich. (Bildung der Gleichung.)

Beispiel. Vertauscht man in einer zweizifferigen Zahl, deren Quersumme 8 ist, beide Ziffern, so erhält man eine Zahl, welche um 10 größer ist als das Doppelte der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

1. Einführung der Unbekannten: Die erste Ziffer sei x, dann ist die zweite $(8 - x)$.

2. Ermittelung der gleichzusetzenden Zahlen: Die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge ist gleich der doppelten ersten Zahl vermehrt um 10.

3. Bestimmung derselben: Die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge ist $10(8 - x) + x = 80 - 9x$, die erste Zahl ist $10x + 8 - x = 9x + 8$, das um 10 vermehrte Doppelte der ersten Zahl $2(9x + 8) + 10$.

4. Bildung der Gleichung: $80 - 9x = 2(9x + 8) + 10$, also $x = 2$.

Ergebnis: Die erste Ziffer ist 2, die zweite 6, daher die gesuchte Zahl 26.

§ 76.

Zur Aufstellung der Gleichungen für die besonders im bürgerlichen Leben und auch sonst vorkommenden wichtigsten Gruppen von Aufgaben leisten folgende Bemerkungen und Sätze gute Dienste.

1. **Zinsrechnung.** Bezeichnet k das Kapitel, z die Zinsen desselben zu p Prozent in t Jahren, so ergeben

$$100 \text{ ℳ in } 1 \text{ J. } p \text{ ℳ Zinsen,}$$

$$1 \text{ ℳ in } 1 \text{ J. } \frac{p}{100} \text{ ℳ,}$$

$$k \text{ ℳ in } t \text{ J. } \frac{kpt}{100} \text{ ℳ Zinsen,}$$

folglich ist $$z = \frac{kpt}{100}, \quad k = \frac{100z}{p \cdot t}, \quad t = \frac{100z}{kp}, \quad p = \frac{100z}{kt}. \tag{98}$$

Anmerkung. Man unterscheidet in der Praxis fälschlich drei Arten der Prozente:

Prozente von Hundert,
Prozente auf Hundert,
Prozente in Hundert,

je nachdem man die Zinsen p auf ein Kapital von 100 ℳ, von $100 + p_a$ ℳ oder von $100 - p_i$ ℳ bezieht.

Kauft jemand für 80 ℳ und verkauft zu 100 ℳ und sagt, er habe 20 Prozent gewonnen, so hat er Prozente in Hundert gemeint, von Hundert sind es 25 Prozent. Kauft er für $133\frac{1}{3}$ und verkauft für 100 ℳ, so ist sein Verlust $33\frac{1}{3}$ Prozent auf Hundert, von Hundert sind es 25 Prozent. Es besteht also die Gleichung

$$\frac{p}{100} = \frac{p_i}{100 - p_i} = \frac{p_a}{100 + p_a}$$

und die Ungleichung

$$\begin{matrix} p_i & < & p & < & p_a \\ 20 & < & 25 & < & 33\frac{1}{3}. \end{matrix}$$

Digitized by Google

Beispiel. Ein Kaufmann hat 1000 ℳ zu 6 Prozent, 2500 ℳ zu 5 Prozent, 3000 ℳ zu 4 Prozent ausstehen. Um einen Wechsel zu decken, kündigt er am Ende des Jahres einen Teil des Kapitals und sieht, daß er vom Reste dieselben Zinsen wie früher beziehen würde, wenn er alle drei Kapitalien zu 5 Prozent ausleiht. Wie groß war der Wechsel?

Auflösung. Angenommen, der Wechsel habe x ℳ betragen, so müssen die jährlichen Zinsen des um x ℳ verminderten Gesamtkapitals zu 5 Prozent gleich der Summe der Zinsen im ersten Jahre sein. Die Zinsen des um x ℳ verminderten Kapitals sind aber $\frac{(6500-x)\cdot 5}{100}$ ℳ, die Gesamtzinsen im ersten Jahre $\left(\frac{1000\cdot 6}{100}+\frac{2500\cdot 5}{100}+\frac{3000\cdot 4}{100}\right)$ ℳ, folglich hat man die Gleichung

$$1000\cdot 6+2500\cdot 5+3000\cdot 4=(6500-x)\,5,\quad \therefore\ x=400.$$

2. **Diskontrechnung.** Bezeichnet b die Barsumme, s die nach t Jahren zu zahlende Schuldsumme, d den zu p Prozent berechneten Diskont, so ist

$$(\alpha)\quad \boldsymbol{s=b+d}, \tag{99}$$

ferner der Diskont auf 100 (d_a) gleich den Zinsen der Barsumme, der im bürgerlichen Leben übliche Diskont in 100 (d_i) (Rabatt) gleich den Zinsen der Schuldsumme, also

$$(\beta)\quad \boldsymbol{d_a=\frac{bpt}{100}},\quad \boldsymbol{d_i=\frac{s\cdot p\cdot t}{100}}. \tag{99*}$$

Beispiel. Eine Schuld von 2420 ℳ wird zwei Monate vor dem Zahlungstermine unter Anrechnung von 5 Prozent Diskont auf 100 bezahlt. Wie groß ist der Diskont und bare Wert?

Auflösung. Angenommen, der bare Wert sei x ℳ, so ist der Diskont gleich $\frac{x\cdot 2\cdot 5}{12\cdot 100}$ ℳ, folglich erhält man nach (α) die Gleichung

$$x+\frac{2\cdot 5\cdot x}{1200}=2420,\quad x=2400.\ \text{Ergebnis: } 2400\ ℳ.$$

3. **Gewinn- und Verlustrechnung.** Bezeichnet e den Einkaufspreis, v den Verkaufspreis, g den zu p Prozent berechneten Gewinn, s den Schaden oder Verlust, so ist

$$(\alpha)\quad \boldsymbol{v=e+g},\quad \boldsymbol{v=e-s}, \tag{100}$$

ferner der Gewinn bzw. der Verlust gleich den jährlichen Zinsen des Einkaufspreises, also

$$(\beta)\quad \left.\begin{matrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{s}\end{matrix}\right\}=\boldsymbol{\frac{ep}{100}}. \tag{100*}$$

4. **Mischungsrechnung.** Die Gleichung erhält man mit Anwendung des Satzes: Die in der Mischung enthaltene Menge an Silber und Gold oder der Preis der Mischung ist gleich der Summe der in den Bestandteilen enthaltenen Mengen an Gold, Silber oder ihrer Preise.

Beispiel. Jemand mischt zwei Sorten einer Ware, von denen 1 kg 21 ℳ bzw. 15 ℳ kostet. Wieviel muß er von jeder Sorte nehmen, um 12 kg einer Mischung zu erhalten, von welcher 1 kg 16,5 ℳ kostet?

Digitized by Google

Auflösung. Angenommen, er nehme von der ersten Sorte x kg, dann nimmt er von der zweiten Sorte (12 — x) kg; es kosten nun x kg: 21 x ℳ, (12 — x) kg: (12 — x) · 15 ℳ, alle 12 kg: 12 · 16,5 ℳ = 198 ℳ; folglich ist

$$21x + (12 - x)\,15 = 198;\quad x = 3.$$ Lösung: 3 kg.

5. **Verteilungs- oder Gesellschaftsrechnung.** Die Gleichung ergibt sich, wenn eine Summe nach gegebenen Verhältnissen geteilt wird, durch den Satz, daß die Summe der Teile gleich der zu teilenden Summe ist; und wenn bei einem geschäftlichen Unternehmen der Gewinn zu teilen ist, so verhalten sich die Anteile der dabei beteiligten Personen wie die auf die Zeiteinheit bezogenen Einlagen. Dabei wird angenommen, daß k ℳ auf n Monate mit k · n ℳ auf 1 Monat gleichwertig sind.

Beispiel. 21000 ℳ sollen unter A, B, C, D nach dem Verhältnisse von 3 : 4 : 5 : 8 geteilt werden. Wieviel Mark erhält jeder?

Auflösung. Angenommen, A erhalte 3 x ℳ, dann erhält B: 4 x, C: 5 x, D: 8 x ℳ, und da die Summe gleich 21000 ℳ ist, findet man die Gleichung

$$3x + 4x + 5x + 8x = 21000,\quad x = 1050,$$

folglich erhält A: 4150 ℳ, B: 4200 ℳ, C: 5250 ℳ, D: 8400 ℳ. Sollten sich die Anteile von A und B wie 2 : 3, die von B und C wie 4 : 5, die von C und D wie 6 : 7 verhalten, so würde, wenn A: 1 ℳ erhält, B: $\frac{3}{2}$, C: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$, D: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6}$ ℳ erhalten, also wenn A: x ℳ erhält, B: $\frac{3x}{2}$, C: $\frac{15x}{8}$, D: $\frac{105x}{48}$ ℳ erhalten.

Es würde sich also die Gleichung

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{8} + \frac{35x}{16} = 21000$$

ergeben, aus welcher x = 3200 folgt. Es würde also

A: 3200 ℳ, B: 4800 ℳ, C: 6000 ℳ, D: 7000 ℳ erhalten.

6. **Bewegungsaufgaben.** Bezeichnet c die Geschwindigkeit, d. i. die in der Zeiteinheit durchlaufene Strecke, so ist die in t Zeiteinheiten durchlaufene Strecke

$$s = ct,\ \text{daher}\ c = \frac{s}{t},\ t = \frac{s}{c}. \qquad (101)$$

In dem Augenblicke der Begegnung zweier Körper ist die Entfernung der Orte, von welchen sie ausgehen, gleich der Summe oder Differenz der durchlaufenen Wege, je nachdem sie in entgegengesetzter oder in derselben Richtung sich bewegen.

Beispiel. Wieviel Minuten nach 3 Uhr wird der große Zeiger einer Uhr zum ersten Male den kleinen bedecken?

Auflösung. Zur Zeit der Bedeckung ist die Differenz der Wege, welche der große und kleine Zeiger zurückgelegt haben, gleich einem Viertel der

Digitized by Google

Peripherie. Setzt man die Peripherie gleich p, so ist der Weg des großen Zeigers in einer Minute gleich $\frac{p}{60}$, der des kleinen Zeigers $\frac{p}{720}$, und wenn sich die beiden Zeiger x Minuten nach 3 Uhr treffen, so sind die in x Minuten von ihnen zurückgelegten Wege $\frac{px}{60}$ und $\frac{px}{720}$; folglich ergibt sich die Gleichung

$$\frac{px}{60} - \frac{px}{720} = \frac{p}{4}, \quad x = 16\tfrac{4}{11}. \quad \text{Ergebnis: } 6\tfrac{4}{11} \text{ Minuten.}$$

Anmerkung. Bei Aufgaben über den Ausfluß von Flüssigkeiten aus einem Behälter wird der Inhalt des Behälters als Hilfsgröße eingeführt, und an die Stelle der Geschwindigkeit tritt der Kubikinhalt der Flüssigkeit, welche aus einer Röhre in der Zeiteinheit fließt.

---

3. Kapitel. Von den Gleichungssystemen des ersten Grades mit zwei und mehreren Unbekannten.

A. Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten.

§ 77.

Enthält eine Gleichung zwei Unbekannte, so gibt es für jeden Wert der einen Unbekannten einen Wert der anderen, welcher der Gleichung genügt. Durch eine Gleichung sind daher zwei Unbekannte noch nicht bestimmt.

Aufgabe. Aus zwei voneinander unabhängigen, einander nicht widersprechenden Gleichungen ersten Grades die beiden in ihnen vorkommenden Unbekannten zu bestimmen.

Auflösung. Jedes System zweier Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten kann nach den im ersten Kapitel angegebenen Regeln auf die Form

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 x + b_1 y = k_1, \\ (2) \quad & a_2 x + b_2 y = k_2 \end{aligned} \tag{102}$$

gebracht werden. Um aus beiden Gleichungen eine Gleichung mit einer Unbekannten (die Eliminationsgleichung) zu finden, muß man eine Unbekannte eliminieren. Dazu dienen drei Verfahren.

1. Die Substitutionsmethode verwendet den Grundsatz: „Gleiches kann man für Gleiches setzen." Man bestimmt den Wert der zu eliminierenden Unbekannten (y) aus der einen Gleichung, indem man x als bekannt annimmt, setzt den gefundenen Wert in die andere Gleichung ein und berechnet aus dieser den Wert der zweiten Unbekannten (x). Hierauf substituiert man den Wert von x in Gleichung (1) oder (2) und berechnet den Wert von y. So erhält man:

$$y = \frac{k_1 - a_1 x}{b_1}, \quad a_2 x + b_2 \frac{k_1 - a_1 x}{b_1} = k_2, \quad x = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

$$a_1 \cdot \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 y = k_1, \qquad y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{102*}$$

Digitized by Google

2. Die Kombinationsmethode verwendet den Grundsatz: „Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.“ Man berechnet den Wert der zu eliminierenden Unbekannten (y) aus beiden Gleichungen, setzt die gefundenen Werte einander gleich und erhält:

$$y = \frac{k_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{k_2 - a_2 x}{b_2} \text{ und hieraus } x = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Ebenso findet man $x = \frac{k_1 - b_1 y}{a_1} = \frac{k_2 - b_2 y}{a_2}$, $y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

3. Die Additionsmethode verwendet den Grundsatz: „Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.“ Man multipliziert beide Gleichungen mit solchen Zahlen, daß die Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten einander entgegengesetztgleich werden, und addiert die erhaltenen Gleichungen. So erhält man die Eliminationsgleichung, aus welcher man den Wert der anderen Unbekannten berechnet. Multipliziert man die erste Gleichung mit $-a_2$, die zweite mit $+a_1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} -a_1 a_2 x - a_2 b_1 y &= -a_2 k_1, \\ +a_1 a_2 x + a_1 b_2 y &= +a_1 k_2, \\ \hline y(a_1 b_2 - a_2 b_1) &= a_1 k_2 - a_2 k_1. \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man durch Elimination von y die andere Eliminationsgleichung:

$$\begin{aligned} +a_1 b_2 x + b_1 b_2 y &= +b_2 k_1, \\ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y &= -b_1 k_2, \\ \hline x(a_1 b_2 - a_2 b_1) &= b_2 k_1 - b_1 k_2. \end{aligned}$$

Lehrsatz 1. Verhalten sich die drei bekannten Größen der einen gegebenen Gleichung wie die entsprechenden bekannten Größen der anderen Gleichung, sind also die Gleichungen nicht unabhängig voneinander, so sind die Werte der Unbekannten unbestimmt.

Beweis. Aus der Proportion $a_1 : b_1 : k_1 = a_2 : b_2 : k_2$ folgt

$$\begin{aligned} a_1 b_2 &= b_1 a_2, & a_1 b_2 - a_2 b_1 &= 0, \\ a_1 k_2 &= a_2 k_1, & a_1 k_2 - a_2 k_1 &= 0, \\ b_1 k_2 &= b_2 k_1, & b_1 k_2 - b_2 k_1 &= 0, \end{aligned}$$

daher $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Lehrsatz 2. Verhalten sich die Koeffizienten der einen der gegebenen Gleichungen wie die entsprechenden Koeffizienten der anderen, nicht aber wie die auf der rechten Seite stehenden Größen, so widersprechen die Gleichungen einander.

Beweis. Ist $a_2 = m a_1$, so folgt, da $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ sein soll, auch $b_2 = m b_1$, aber $k_2 \gtrless m k_1$; daher gehen Gleichung (1) und (2) in die folgenden über:

$$m a_1 x + m b_1 y = m k_1, \quad m a_1 x + m b_1 y = k_2,$$

welche, da k_2 ungleich $m k_1$ ist, einander widersprechen.

Digitized by Google

Lehrsatz 3. Außer den für x und y gefundenen Werten (x_1, y_1) gibt es nicht noch zwei andere von jenen verschiedene Werte, welche den Gleichungen genügen.

Beweis. Wären x_2, y_2 solche Werte, so hätte man:

$$\begin{array}{rr} a_1x_1 + b_1y_1 = k_1 & a_2x_1 + b_2y_1 = k_2 \\ a_1x_2 + b_1y_2 = k_1 & a_2x_2 = b_2y_2 = k_2 \\ \hline a_1(x_1 - x_2) + b_1(y_1 - y_2) = 0, & a_2(x_1 - x_2) + b_2(y_1 - y_2) = 0, \end{array}$$

folglich $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2},$$

was unmöglich ist, wenn die gegebenen Gleichungen voneinander unabhängig sind und einander nicht widersprechen.

B. Determinanten.

§ 78.

Erklärung. Die Verbindung $a_1 b_2 - a_2 b_1$, welche bei der Lösung der Gleichungen (1) und (2) auftrat, heißt die Determinante zweiten Grades der vier Elemente a_1, b_1, a_2, b_2. Sie wird aus vier Elementen gebildet, welche in zwei Zeilen (Horizontalreihen) und zwei Spalten (Vertikalreihen, Staffeln) geordnet sind. Die Elemente der einen Art von Reihen werden durch Buchstaben (a, b), die Elemente der anderen Art von Reihen durch Indizes (1, 2) unterschieden. So entsteht das quadratisch geordnete System der vier Elemente

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2, \end{matrix}$$

in welchem die Elemente a_1 b_2 die Hauptdiagonale, a_2 b_1 die Nebendiagonale bilden.

Unter der Determinante zweiten Grades versteht man die algebraische Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man in dem quadratisch geordneten Systeme der vier Elemente aus jeder Zeile und Spalte je ein Element als Faktor nimmt, dem Produkte aus den in der Hauptdiagonale stehenden Elementen das positive Vorzeichen, dem andern Produkte das negative Vorzeichen gibt. Die Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$ wird bezeichnet mit

$$\boldsymbol{D}_2 \text{ oder } \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} \text{ oder } (\boldsymbol{a\,b}) \text{ oder } (\boldsymbol{a_1\,b_2}). \qquad (\mathbf{103})$$

Erklärung. Die Determinante dritten Grades wird aus neun Elementen gebildet, welche in drei Zeilen und drei Spalten geordnet sind. Die Elemente der einen Art von Reihen, der Zeilen, werden durch Buchstaben (a, b, c), die der Spalten durch Indizes (1, 2, 3) unterschieden. So entsteht das quadratisch geordnete System der neun Elemente

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, \end{matrix}$$

in welchem die Elemente a_1 b_2 c_3 die Hauptdiagonale bilden.

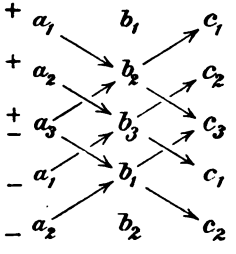
Digitized by Google

Unter der Determinante dritten Grades versteht man die algebraische Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man in dem quadratisch geordneten Systeme der neun Elemente aus jeder Spalte und Zeile je ein Element als Faktor nimmt, dem Produkte aus den in der Hauptdiagonale stehenden Elementen das positive Vorzeichen und je zwei Produkten, die ein Element gemeinsam haben, entgegengesetzte Vorzeichen erteilt. Es ist daher die Determinante des obigen Systems:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1;$$

sie wird bezeichnet mit

$$D_3 \text{ oder } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ oder } (abc) \text{ oder } (a_1 b_2 c_3). \qquad (104)$$



Mechanisch bildet man die Determinante nach der Sarrusschen Regel (vgl. nebenstehende Figur).

Durch Bilden der Determinanten ergibt sich sofort die Richtigkeit folgender Sätze:

Lehrsatz 1. Die Determinante D_3 behält denselben Wert, wenn man die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen macht.

$$(abc) = (1, 2, 3); \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Lehrsatz 2. Die Determinante D_3 erhält den entgegengesetzten Wert, wenn man zwei Parallelreihen (Zeilen oder Spalten) miteinander vertauscht.

$$(abc) = -(acb). \qquad (105)$$

Folgerung 1. Eine Determinante D_3, in welcher die entsprechenden Elemente zweier Zeilen oder Spalten einander gleich sind, ist gleich Null. (Aus $D_3 = -D_3$ folgt $D_3 = 0$.)

$$(abb) = 0. \qquad (105^*)$$

Lehrsatz 3. Die Determinante D_3 wird mit einer Zahl multipliziert oder durch sie dividiert, indem man die Elemente einer Zeile oder Spalte mit ihr multipliziert oder durch sie dividiert.

$$m(abc) = (ma, b, c). \qquad (106)$$

Folgerung 2. Eine Determinante D_3, in welcher die entsprechenden Elemente zweier Zeilen oder Spalten proportional sind, ist gleich Null.

Beweis. Mit Anwendung von L. 3 und F. 1 folgt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lehrsatz 4. Eine Determinante, in der alle Elemente einer Reihe verschwinden, ist gleich Null.

$$(ab0) = 0. \qquad (106^*)$$

Digitized by Google

§ 79.

Lehrsatz 5. Stimmen zwei Determinanten in zwei Staffeln überein, so erhält man ihre Summe aus einer dritten Determinante mit denselben zwei Staffeln und der Summe der Elemente der dritten Staffel als dritte Staffel.

$$(abc) + (abd) = (a,\ b,\ c + d). \qquad (107)$$

Beweis durch Ausrechnung der Determinanten.

Lehrsatz 6. Der Wert einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Staffel die Elemente einer andern Staffel (multipliziert mit einem beliebigen aber für alle gleichen Faktor) addiert.

$$(a + kb,\ b,\ c) = (abc). \qquad (107^*)$$

Beweis. $(a + kb,\ b,\ c) = (abc) + (kb,\ b,\ c)$ Lf. 5.
$(kb,\ b,\ c) = 0$. Lf. 2, Folg. 2.

C. Gleichungen des ersten Grades mit drei und mehreren Unbekannten.

§ 80.

Aufgabe. Aus drei voneinander unabhängigen, einander nicht widersprechenden Gleichungen des ersten Grades mit drei Unbekannten die Werte derselben zu berechnen.

Auflösung 1. Jedes System von Gleichungen mit drei Unbekannten läßt sich auf die Form

$$(1)\quad a_1x + b_1y + c_1z = k_1,$$
$$(2)\quad a_2x + b_2y + c_2z = k_2,$$
$$(3)\quad a_3x + b_3y + c_3z = k_3$$

bringen. Um aus denselben die Werte der Unbekannten zu bestimmen, eliminiert man nach den Methoden von § 77 die eine Unbekannte, entweder aus den Gleichungen (1, 2) und (1, 3) oder aus (1, 2) und (2, 3) oder aus (1, 3) und (2, 3) und berechnet aus den erhaltenen zwei Eliminationsgleichungen die Werte der beiden anderen Unbekannten, hierauf den Wert der ersten Unbekannten durch Substitution der erhaltenen Werte in Gleichung (1), (2) oder (3).

Auflösung 2. Methode der Determinanten.

Man bildet aus den Koeffizienten der Unbekannten eine Determinante und verfährt nach folgendem Schema:

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (Lf. 3)} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (Lf. 6)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (Lf. 6)} = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

Also ist

$$x = (kbc) : (abc)$$

$$y(abc) = (a, by, c) = (a, ax + by, c) = (a, ax + by + cz, c) = (akc)$$

$$y = (akc) : (abc)$$

$$z = (abk) : (abc).$$

Der Wert jeder Unbekannten ist also gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante der neun Koeffizienten der drei Unbekannten ist, und dessen Zähler erhalten wird, indem man für die Koeffizienten der gesuchten Unbekannten die entsprechenden, auf der rechten Seite stehenden Größen setzt.

Folgerung. Die Werte von x, y, z hören auf, bestimmte endliche Größen zu sein, wenn die Determinante der neun Koeffizienten gleich Null wird.

Lehrsatz 1. Verhalten sich in dem Systeme der drei gegebenen Gleichungen die bekannten Größen einer Gleichung wie die entsprechenden bekannten Größen einer zweiten Gleichung, so sind die Werte der Unbekannten unbestimmt.

Beweis. Ist $a_2 = ma_1$, also $b_2 = mb_1$, $c_2 = mc_1$, $k_2 = mk_1$, so wird nach Substitution dieser Werte zufolge § 78, F. 2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0,$$

also $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$, $z = \frac{0}{0}$.

Lehrsatz 2. Verhalten sich die Koeffizienten der Unbekannten einer Gleichung wie die entsprechenden Koeffizienten der Unbekannten einer zweiten Gleichung, nicht aber wie die auf den rechten Seiten stehenden Größen, so widersprechen die Gleichungen einander. Beweis entsprechend dem von § 77, L. 2.

Lehrsatz 3. Außer den für x, y, z gefundenen Werten (x_1, y_1, z_1) gibt es nicht drei andere von ihnen verschiedene Werte für x, y, z, welche den gegebenen Gleichungen genügen, wenn $(abc) \gtrless 0$ ist.

Beweis. Wären x_2, y_2, z_2 solche Werte, so erhielte man entsprechend § 77, L. 3.:

$$\begin{aligned} a_1(x_1 - x_2) + b_1(y_1 - y_2) + c_1(z_1 - z_2) &= 0, \\ a_2(x_1 - x_2) + b_2(y_1 - y_2) + c_2(z_1 - z_2) &= 0, \\ a_3(x_1 - x_2) + b_3(y_1 - y_2) + c_3(z_1 - z_2) &= 0, \end{aligned}$$

folglich $(x_1 - x_2)(abc) = (0, b, c) = 0$, also ist entweder (abc) oder $x_1 - x_2$ gleich Null. Das erstere widerspricht der Voraussetzung.

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 8 \\ 2x - y - z &= 10 \\ 3x - 2y - 2z &= 9 \end{aligned}$$

$$(abc) = \begin{vmatrix} 1 & +1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = +12 - 9 = 3$$

$$(kbc) = \begin{vmatrix} 8 & +1 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \\ 9 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 60 - 27 = 33, \quad x = 11$$

Digitized by Google

$$(a\,k\,c) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \\ 3 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 36 - 15 = 21,\quad y = 7$$

$$(a\,b\,k) = \begin{vmatrix} 1 & +1 & 8 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 65 - 50 = 15,\quad z = 5$$

Beispiel 2. Aufgabe. (Dölp-Netto S. 122.)

Der Bruch $\dfrac{7x^2 + 7x - 176}{(x+2)(x-4)(x-7)}$ soll in seine Teilbrüche zerlegt werden.

Lösung. Es sei

$$\frac{7x^2 + 7x - 176}{(x+2)(x-4)(x-7)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{x-7}$$

$$= \frac{a(x^2 - 11x + 28) + b(x^2 - 5x - 14) + c(x^2 - 2x - 8)}{(x+2)(x-4)\cdot(x-7)}$$

Die unbekannten Größen sind hier a, b, c.

Sollen die Brüche identisch sein, so müssen im Zähler die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x übereinstimmen, also:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} a & + & b & + c & = 7 \\ -11a & - & 5b & - 2c & = +7 \\ 28a & - & 14b & - 8c & = -176 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{rrrcr} a & + & b & + c & = 7 \\ 11a & + & 5b & + 2c & = -7 \\ -14a & + & 7b & + 4c & = 88 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 2 \\ -14 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & -6 & -9 \\ -14 & 21 & 18 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} 3\cdot 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & -1 \\ -14 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 9\cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & 2 \\ 88 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 88 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 88 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 88 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{4)}{=} 3\,(7 - 88) = -3\cdot 81.$$

$$3\cdot 9\cdot 3\,a = -3\cdot 81 \quad \therefore a = -3$$

$$b + c = 10$$

$$5b + 2c = 26$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} b = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 26 & 2 \end{vmatrix} \quad \therefore -3b = 20 - 26 \quad \therefore b = 2$$

$$c = 10 - 2 = 8$$

$$\frac{7x^2 + 7x - 176}{(x+2)(x-4)(x-7)} = -\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-4} + \frac{8}{x-7}$$

§ 81.

Die im vorigen Paragraphen dargelegten Methoden dienen dazu, auch Systeme von Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten zu lösen. Sind

[1]) Die erste Staffel wurde von der 2. und 3. subtrahiert.

[2]) Die erste Zeile wurde zur zweiten addiert. [3]) Die mit 2 multiplizierte dritte Staffel wurde von der zweiten subtrahiert. [4]) Die erste und zweite Zeile vertauscht, dafür das Minuszeichen in der 2. Staffel getilgt.

Digitized by Google

n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, und eliminiert man aus einer der n Gleichungen in Verbindung mit je einer der übrigen eine der Unbekannten, so erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Eliminiert man ferner aus einer dieser (n — 1) Gleichungen und jeder der übrigen eine zweite Unbekannte, so bleiben noch (n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten; und wenn man so fortfährt, gelangt man endlich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Ist die Anzahl der gegebenen Gleichungen kleiner als die der Unbekannten, so ergibt sich durch fortgesetzte Elimination eine Gleichung mit mehreren Unbekannten. Ihre Werte sind nicht bestimmt. Zur Auflösung eines Systems von Gleichungen mit n Unbekannten sind daher n voneinander unabhängige, einander nicht widersprechende Gleichungen notwendig.

§ 82.

In einer durch Worte gegebenen Gleichung kann die Berechnung von mehreren Unbekannten gefordert sein. Man bezeichnet sie mit x, y, z, ... und gelangt zu den Gleichungen, indem man nach den in § 75 gegebenen Regeln verfährt. Damit die Unbekannten bestimmt seien, muß die Anzahl der Unbekannten gleich der aus den Bedingungen der Aufgabe sich ergebenden Anzahl von Gleichungen sein. Übersteigt die Anzahl der abgeleiteten Gleichungen die der Unbekannten, so ist die Aufgabe eine überstimmte. Man kann in diesem Falle die Unbekannten aus einer ausgewählten Zahl von Gleichungen berechnen und die für sie berechneten Werte in die nicht benutzten Gleichungen einsetzen. Werden dadurch diese letzteren Gleichungen zu identischen, so ist die Aufgabe lösbar; die überzähligen Gleichungen waren überflüssig. In gewissen Fällen können derartige überzählige Gleichungen von Wert sein; sie dienen z. B. dazu, die unvermeidlichen Ungenauigkeiten, welche sich bei Messungen ergeben, möglichst auszugleichen.

Wenn die durch die Aufgabe gegebenen Beziehungen zweier Unbekannten untereinander von einfacher Form sind, z. B. ihre Summe $(x+y)$ gleich s oder ihre Differenz $(x-y)$ gleich d, ihr Quotient $(y:x)$ gleich q ist, so führt man nur eine Unbekannte x ein und setzt die andere bezüglich gleich $s-x$, $x-d$, qx. Man erhält dann nur eine Gleichung mit einer Unbekannten.

---

4. Kapitel. Von den quadratischen Gleichungen.

A. Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 83.

Mit Benutzung der Regeln von § 73 kann jede quadratische Gleichung auf ihre allgemeine Form $ax^2+bx+c=0$ gebracht werden. Das Glied ax^2 heißt das quadratische, bx das lineare, c das unabhängige Glied.

1. Ist in der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung das lineare Glied, also $b=0$, so wird

$$ax^2+c=0,\quad ax^2=-c,\quad x^2=-\frac{c}{a},\quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Digitized by Google

Eine solche Gleichung heißt eine rein quadratische; sie hat zwei entgegengesetztgleiche Wurzeln, welche reell oder imaginär sind, je nachdem a und c entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

2. Ist in der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung das unabhängige Glied $c = 0$, so wird

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0.$$

Die Gleichung wird eine identische, sowohl wenn $x = 0$, als auch wenn $ax + b = 0$ oder $x = -\frac{b}{a}$ wird. Es ist daher die eine Wurzel $x_1 = 0$, die andere $x_2 = -\frac{b}{a}$ stets reell.

3. Eine quadratische Gleichung, in welcher die drei bekannten Zahlen von Null verschieden sind, heißt eine gemischt quadratische. Zur Vorbereitung ihrer Lösung dividiert man die allgemeine Form durch den Koeffizienten von x^2, so daß er gleich $+1$ wird, setzt $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$. Dadurch nimmt sie die Form $x^2 + px + q = 0$ an.

Aufgabe. Eine gemischt quadratische Gleichung von der Form $x^2 + px + q = 0$ aufzulösen.

Auflösung. Man bringt das unabhängige Glied auf die rechte Seite, addiert, um die linke Seite zum Quadrat eines Binoms zu vervollständigen, auf beiden Seiten das Quadrat des halben Koeffizienten von x (die quadratische Ergänzung), zieht aus beiden Seiten der erhaltenen Gleichung die Quadratwurzel und bringt die bekannten Zahlen auf eine Seite. So erhält man:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4},$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (108)$$

Folgerung. Jede quadratische Gleichung hat im allgemeinen zwei ungleiche Wurzeln.

1. Die Wurzeln sind komplexe Zahlen, wenn q positiv und sein absoluter Wert $> \frac{1}{4}p^2$ ist.

2. Die beiden reellen Wurzeln haben entgegengesetzte Vorzeichen, wenn

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} > \frac{p}{2}, \ \therefore \frac{p^2}{4} - q > \frac{p^2}{4}, \ \therefore -q > 0, \ \therefore q < 0 \text{ ist;}$$

sie haben gleiches Vorzeichen, wenn

$$\frac{p}{2} > \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}, \ \therefore \tfrac{1}{4}p^2 > \tfrac{1}{4}p^2 - q, \ \therefore q > 0 \text{ ist.}$$

Im letzteren Falle sind beide Wurzeln positiv, wenn p negativ ist, sie sind beide negativ, wenn p positiv ist.

Digitized by Google

3. Die beiden Wurzeln sind einander gleich, wenn $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = 0$, also $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$ ist.

§ 84.

Lehrsatz 1. In jeder quadratischen Gleichung von der Form $x^2 + px + q = 0$ ist die Summe der Wurzeln gleich dem Koeffizienten von x mit umgekehrtem Vorzeichen, das Produkt der beiden Wurzeln gleich dem unabhängigen Gliede.

Beweis.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}\right) \\ &= -p. \\ x_1 \cdot x_2 &= -\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} + \frac{p}{2}\right)\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} - \frac{p}{2}\right) = -(\tfrac{1}{4}p^2 - q - \tfrac{1}{4}p^2) \\ &= +q. \end{aligned}\right\} \quad (109)$$

Folgerung. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung, so ist:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0.$$

Lehrsatz 2. Die linke Seite der auf Null gebrachten quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist gleich dem Produkte zweier Binome, welche man erhält, wenn man von der Unbekannten die beiden Wurzeln abzieht.

Beweis. Durch Auflösen der Klammern ergibt sich:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2,$$

oder da nach L. 1, wenn x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind,

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q \text{ ist,}$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (109^*)$$

Aufgabe. Einen quadratischen Ausdruck von der Form $ax^2 + bx + c$ in ein Produkt zu verwandeln.

Auflösung. Setzt man $ax^2 + bx + c = 0$, also $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, so ist:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

also nach vorigem Lehrsatze:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right).$$

B. Zurückführung von Gleichungen höherer Grade auf quadratische.

§ 85.

Einige Gleichungen höherer Grade, in welchen die Unbekannte nur in einer gewissen Verbindung vorkommt, lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen, indem man für diese Verbindung eine neue Unbekannte setzt.

Digitized by Google

Aufgabe 1. Jede Gleichung von der Form $x^{2n} + px^n + q = 0$ auf eine quadratische Gleichung zurückzuführen.

Auflösung. Setzt man $x^n = y$, so ist $x^{2n} = (x^n)^2 = y^2$, also $y^2 + py + q = 0$, daher, wenn y_1 und y_2 die Wurzeln dieser Gleichungen sind, $x_1 = \sqrt[n]{y_1}$ und $x_2 = \sqrt[n]{y_2}$.

Da nach § 61 Folg. für jede n^{te} Wurzel aus einer Zahl sich n Wurzelwerte finden lassen, so hat die gegebene Gleichung 2n Wurzeln.

Aufgabe 2. Jede Gleichung von der Form $\sqrt[m]{x} + p\sqrt[2m]{x} + q = 0$ auf eine quadratische Gleichung zurückzuführen.

Auflösung. Setzt man $\sqrt[2m]{x} = y$, dann ist $\sqrt[m]{x} = \left(\sqrt[2m]{x}\right)^2 = y^2$, also $y^2 + py + q = 0$, daher, wenn y_1 und y_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind,

$$x_1 = {y_1}^{2m}, \quad x_2 = {y_2}^{2m}.$$

Aufgabe 3. Jede Gleichung von der Form $x^n + \frac{q}{x^n} + p = 0$ auf eine quadratische Gleichung zurückzuführen.

Auflösung. Setzt man $x^n = y$, so wird $y + \frac{q}{y} + p = 0$, $y^2 + py + q = 0$, daher, wenn y_1 und y_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind,

$$x_1 = \sqrt[n]{y_1}, \quad x_2 = \sqrt[n]{y^2}.$$

Die gegebene Gleichung hat daher, da für jede n^{te} Wurzel aus einer Zahl sich n Wurzelwerte ergeben, 2n Wurzeln.

§ 86.

Reziproke Gleichungen.

Gleichungen des dritten, vierten und fünften Grades, in deren allgemeiner Form je zwei korrespondierende Glieder, d. h. das erste und letzte, das zweite und vorletzte, das dritte und drittletzte gleiche oder entgegengesetztgleiche Koeffizienten haben, können auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden. Eine solche Gleichung fünften Grades hat also die Form

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + by^2 + ax + 1 = 0.$$

Setzt man in derselben $\frac{1}{x}$ für x und multipliziert die erhaltene Gleichung mit x^5, so erhält man wieder die gegebene Gleichung. Man schließt daraus, daß, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\frac{1}{x_1}$ ihr genügt, und nennt deshalb solche Gleichungen reziproke Gleichungen.

Aufgabe 1. Eine reziproke Gleichung dritten Grades, in welcher die korrespondierenden Glieder gleiche oder entgegengesetztgleiche Koeffizienten haben, aufzulösen.

Digitized by Google

Auflösung. Es seien gegeben die Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0,$$

welche, wenn die korrespondierenden Glieder vereinigt werden, übergehen in die Gleichungen

$$(x^3 + 1) + ax(x + 1) = 0 \text{ bzw. } (x^3 - 1) + ax(x - 1) = 0.$$

Setzt man (nach § 47) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ und $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, sondert $(x + 1)$ bzw. $(x - 1)$ ab, so erhält man

$$(x + 1)[x^2 + x(a - 1) + 1] = 0 \text{ und } (x - 1)[x^2 + x(a + 1) + 1] = 0,$$

Gleichungen, welche identisch werden, wenn entweder $x + 1 = 0$ bzw. $x - 1 = 0$ oder die quadratische Form in der Klammer gleich Null wird. Jede der Gleichungen hat daher drei Wurzelwerte.

Aufgabe 2. Eine reziproke Gleichung vierten Grades, in welcher die korrespondierenden Glieder gleiche oder entgegengesetztgleiche Koeffizienten haben, aufzulösen.

Auflösung. 1. Es sei gegeben $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$.

Dividiert man die Gleichung durch x^2 und vereinigt die korrespondierenden Glieder, so erhält man

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, so erhält man die Gleichung:

$$z^2 - 2 + az + b = 0,$$

aus welcher sich 2 Werte für z ergeben. Setzt man dieselben in die Gleichung $x + \frac{1}{x} = z$, so findet man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung.

2. Es sei gegeben die Gleichung $x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0$.

Vereinigt man die korrespondierenden Glieder und sondert $x^2 - 1$ ab, so erhält man

$$(x^4 - 1) + ax(x^2 - 1) = 0,$$
$$(x^2 - 1)[x^2 + 1 + ax] = 0,$$

eine Gleichung, welche erfüllt wird, wenn entweder $x^2 - 1 = 0$ ist, oder wenn der quadratische Ausdruck in der Klammer gleich Null wird. So findet man die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Aufgabe 3. Aufzulösen die reziproke Gleichung 5. Grades, in welcher die korrespondierenden Glieder gleiche oder entgegengesetztgleiche Koeffizienten haben.

Auflösung. 1. Es sei gegeben die Gleichung

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

welche durch Vereinigung der korrespondierenden Glieder übergeht in:

$$(x^5 + 1) + ax(x^3 + 1) + bx^2(x + 1) = 0.$$

Digitized by Google

Da nun $(x+1)$ in (x^5+1) und in (x^3+1) aufgeht, so kann man links $(x+1)$ absondern, und man erhält

$$(x+1)[x^4-x^3+x^2-x+1+ax(x^2-x+1)+bx^2]=0, \text{ oder}$$
$$(x+1)[x^4+x^3(a-1)+x^2(b+1-a)+x(a-1)+1]=0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, sowohl wenn $(x+1)=0$, als auch wenn der Ausdruck in der Klammer gleich Null wird. Die Auflösung derselben ist daher auf eine reziproke Gleichung des 4. Grades zurückgeführt.

2. Ähnlich läßt sich die Gleichung $x^5+ax^4+bx^3-bx^2-ax-1=0$ in die Gleichung $(x-1)[x^4+x^3(a+1)+x^2(a+b+1)+x(a+1)+1]=0$ verwandeln, ihre Lösung ist mithin auf die einer reziproken Gleichung 4. Grades zurückgeführt.

C. Systeme quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§ 87.

Die quadratischen Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten, zu denen man auch diejenigen rechnet, welche durch Umformungen auf quadratische Gleichungen sich zurückführen lassen, werden im allgemeinen nach den für die Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten gegebenen Regeln gelöst. In vielen Fällen führen besondere Wege leichter zum Ziele.

1. Bei den quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten gelingt es oft durch Division oder durch eine anderweite Kombination der beiden Gleichungen dieselben auf einen niederen Grad zu bringen oder eine Unbekannte zu eliminieren oder eine dritte einfachere Gleichung abzuleiten, welche an die Stelle einer der gegebenen Gleichungen gesetzt werden kann. Dabei ist zu beachten (vgl. § 95, Zus. 2), daß stets teilbar ist:

a) die Summe der ungeraden Potenzen zweier Zahlen von demselben Grade durch die Summe der Zahlen,

b) die Differenz der ungeraden Potenzen zweier Zahlen von demselben Grade durch die Differenz der Zahlen,

c) die Differenz der geraden Potenzen zweier Zahlen von demselben Grade durch die Summe und Differenz der Zahlen.

2. Die häufigste Form

$$x+y=a,\ x\cdot y=b$$

läßt sich stets auf eine quadratische Gleichung von der Form

$$t^2-at+b=0 \qquad (110^*)$$

zurückführen, deren Wurzeln t_1 und t_2 je gleich x und y sind. Denn es ist

$$(t-x)(t-y)=t^2-t(x+y)+xy=t^2-at+b.$$

Auch das System $x-y=a,\ xy=b$ läßt sich so behandeln, indem man $t_1=x,\ t_2=-y$ setzt und beide aus der Gleichung

$$t^2-at-b=0$$

findet.

Man kann diese Gleichungen auch durch Substitution lösen.

Digitized by Google

*3. Setzt man $x + y = u$ und $xy = w$,
ſo erhält man aus der identiſchen Gleichung

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy \qquad x - y = \pm\sqrt{u^2 - 4w}, \text{ daher}$$
$$x = \tfrac{1}{2}u \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4w}, \qquad y = \tfrac{1}{2}u \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{u^2 - 4w}.$$

Setzt man: $x - y = v$ und $xy = w$,
ſo erhält man aus der identiſchen Gleichung

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy, \qquad x + y = \pm\sqrt{v^2 + 4w}, \text{ daher}$$
$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4w} + \tfrac{1}{2}v \qquad y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4w} - \tfrac{1}{2}v.$$

Es iſt ferner:

$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$, alſo $x^2 + y^2 = u^2 - 2w = v^2 + 2w$.
$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, alſo $x^3 + y^3 = u^3 - 3uw$.
$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$, alſo $x^3 - y^3 = v^3 + 3vw$.
$(x + y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2w + 2w^2$.
Ebenſo findet man:

$$x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3w + 5uw^2.$$
$$x^5 - y^5 = v^5 + 5v^3w + 5vw^2.$$

Ferner

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \pm u\sqrt{u^2 - 4w} = \pm v\sqrt{v^2 + 4w},$$
$$x^4 - y^4 = \pm(u^2 - 2w)u\sqrt{u^2 - 4w} = \pm(v^2 + 2w)v\sqrt{v^2 + 4w}.$$

Man wird daher auch in beiden Gleichungen, wenn die Unbekannten in den Verbindungen $x^2 \pm y^2$, $x^3 \pm y^3$, $x^4 \pm y^4$, $x^5 \pm y^5$ vorkommen, für $x \pm y$ und xy die neuen Unbekannten u oder v und w einführen und jene Verbindungen durch ſie ausdrücken können.

*4. Sind in den auf die Normalform (§ 73 A.) gebrachten beiden Gleichungen alle Glieder der linken Seiten von denſelben Dimenſionen (xy^3, x^2y^2, x^3y von 4 Dimenſionen), ſo ſind die linken Seiten der Gleichungen **homogen**. Man ſetzt $y = xz$ oder $\frac{x}{y} = z$ und erhält durch Diviſion der einen Gleichung durch die andre eine Gleichung mit der einen Unbekannten z. Bisweilen muß man die eine Gleichung potenzieren, damit die Glieder der linken Seite gleiche Dimenſionen erhalten. Öfters erhält man die Verbindung $\frac{x}{y} = z$, z. B. wenn die Unbekannten in den Verbindungen $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \frac{x^3+y^3}{2xy}, \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ uſw. unmittelbar oder mittelbar gegeben ſind, durch Anwendung der korreſpondierenden Addition (vgl. § 44).

*5. Kommen in den Gleichungen mit **drei Unbekannten** (x, y, z) zwei derſelben (y, z) in den § 87, 3 angegebenen Verbindungen vor, ſo kann man dieſelben mit Benutzung der daſelbſt aufgeſtellten Gleichungen durch $(y \pm z)$ und (yz) ausdrücken, indem man dabei die dritte Unbekannte als bekannt vorausſetzt. Aus drei Gleichungen laſſen ſich aber $(y \pm z)$ und (yz) eliminieren, und es bleibt noch eine Gleichung, aus welcher man die dritte Unbekannte x berechnen kann.

Digitized by Google

*6. Kommen in den Gleichungen mit vier Unbekannten (x, y, z, t) je zwei derselben (x, y) und (z, t) in den § 87, 3 angegebenen Verbindungen vor, so kann man alle Verbindungen durch $x \pm y$, $x \cdot y$, $z \pm t$ und $z \cdot t$ ausdrücken. Aus den zur Bestimmung erforderlichen vier Gleichungen kann man oft leichter diese vier Verbindungen berechnen.

§ 88. *

Beispiel 1. Es sind gegeben die Gleichungen

(1) $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=45$, (2) $(x^2-y^2)(x^3-y^3)=21$;

die reellen Werte der Unbekannten zu berechnen.

Auflösung. Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite und schafft in der erhaltenen Gleichung die Nenner fort, so ergibt sich

$$21(x^2+y^2)(x^3+y^3)=45(x^2-y^2)(x^3-y^3), \text{ oder}$$
$$(x+y)[21(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)-45(x-y)(x^3-y^3)]=0.$$

Die Gleichung wird für $x+y=0$ identisch. Der sich daraus ergebende Wert $y=-x$ bringt den Quotienten der gegebenen Gleichungen auf die Form $\frac{0}{0}$, genügt aber nicht den Gleichungen selbst. Führt man in dem Klammerausdrucke die Multiplikationen aus und setzt $y=xz$, so geht er über in:

$$4z^4-4z^3-7z^2-4z+4=0.$$

Die Gleichung ist eine reziproke Gleichung 4. Grades. Löst man sie nach den gegebenen Regeln, so erhält man

$$4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-4\left(z+\frac{1}{z}\right)=7$$

und, wenn man $z+\frac{1}{z}=u$, $z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2$ setzt,

$$4u^2-4u=15, \quad u_1=\frac{5}{2}, \quad u_2=-\frac{3}{2}.$$

Aus der Gleichung $z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}$ findet man $z_1=2$, $z_2=\frac{1}{2}$; die Gleichung $z+\frac{1}{z}=-\frac{3}{2}$ führt zu imaginären Werten. Es ergibt sich daher $y_1=2x$ und $y_2=\frac{1}{2}x$, und indem man diese Werte in (1) einsetzt,

$$x_1{}^5=1, \quad x_2{}^5=32,$$

also wenn man von den imaginären Werten absieht,

$$x_1=1, \quad y_1=2, \quad x_2=2, \quad y_2=1.$$

Beispiel 2. Es sind gegeben die Gleichungen

$$x^5+y^5=33, \quad x+y=3;$$

die sämtlichen endlichen Wurzeln derselben zu berechnen.

Digitized by Google

Auflösung. Setzt man $xy = w$, so erhält man mit Benutzung der Gleichungen in § 87:

$$243 - 135w + 15w^2 = 33, \quad w_1 = 7, \quad w_2 = 2.$$

Es ergeben sich daher die beiden Systeme:

I. $x + y = 3$, $xy = 7$, hieraus $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-19}$, $y = \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-19}$.
II. $x + y = 3$, $xy = 2$, hieraus $x_3 = 2$, $y_3 = 1$, $x_4 = 1$, $y_4 = 2$.

Mithin sind die Wurzeln der Gleichung

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{-19}), \quad x_2 = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{-19}), \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1,$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{-19}), \quad y_2 = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{-19}), \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 2.$$

Anmerkung. Da $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = 3(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ ist, so hat obige Gleichung nur vier endlich große Wurzeln.

---

5. Kapitel. Exponentialgleichungen.

§ 89.

Erklärung. Eine Gleichung, welche die Unbekannte als Exponent einer Potenz oder einer Wurzel oder als Bestandteil eines solchen Exponenten enthält, heißt eine Exponentialgleichung. Man sucht sie zu lösen, indem man sie mit Anwendung der Potenz-, Wurzel- und Logarithmensätze auf algebraische Gleichungen zurückführt. Dies wird immer möglich sein, wenn bewirkt werden kann, daß zwei Potenzen von gleicher Basis einander gleich sind, oder daß die Unbekannte nur in einer Verbindung (a^x) vorkommt. Man berechnet diese und bildet die Logarithmen der beiden Seiten der erhaltenen Gleichung. Die Zurückführung auf algebraische Gleichungen gelingt auch in dem Falle, daß die Unbekannten in den Exponenten mehrerer Grundzahlen vorkommen, wenn man bewirken kann, daß die beiden Seiten der Gleichungen die Form von Produkten haben, in welchen die die Unbekannten enthaltenden Potenzen als Faktoren vorkommen.

Beispiel 1. $\boldsymbol{d\sqrt[2x]{a} + e\sqrt[x]{a} + b = 0.}$

Auflösung. Setzt man $\sqrt[2x]{a} = y$, so ist $\sqrt[x]{a} = y^2$, also

$$ey^2 + dy + b = 0, \quad x = \tfrac{1}{2}(\log a : \log y).$$

Beispiel 2. $\boldsymbol{u = yq^{x-1}, \quad s = yq^x - yb.}$

Auflösung. Multipliziert man die erste Gleichung mit q und setzt $q^x = z$, so erhält man:

$$(1)\ uq = y \cdot z \quad (2)\ s = y(z - b), \quad \therefore \frac{z}{z - b} = \frac{uq}{s} \text{ oder } z = \frac{uqb}{uq - s},$$

$$x = (\log(uqb) - \log(uq - s)) : \log q, \quad y = \frac{uq - s}{b}.$$

Beispiel 3. $a^{mx+n} \cdot b^{s-rx} = c \cdot d^{ex-q}$.

Digitized by Google

Auflösung. Durch Anwendung der Potenzsätze erhält man

$$\frac{a^{mx} \cdot a^n \cdot b^s}{b^{rx}} = \frac{c \cdot d^{ex}}{d^q} \qquad \frac{a^{mx}}{b^{rx} \cdot d^{ex}} = \frac{c \cdot}{a^n b^s d^q},$$

$$x\,(m\log a - r\log b - e\log d) = \log c - (n\log a + s\log b + q\log d).$$

---

6. Kapitel.* Von den sogenannten Diophantischen Gleichungen.

§ 90.*

Erklärung. Unter unbestimmten Gleichungen, die auch unhistorisch Diophantische Gleichungen genannt werden, versteht man solche Gleichungen oder Systeme von Gleichungen, bei welchen die Zahl der Unbekannten größer als die der Gleichungen ist. Sie werden durch eine unendliche Anzahl von Wurzeln bzw. Wurzelsystemen erfüllt; denn sind n Gleichungen und $n + k$ Unbekannte vorhanden, so lassen sich $(n - 1)$ Unbekannte eliminieren, und es bleibt eine Gleichung mit $(k + 1)$ Unbekannten übrig. Jede derselben läßt sich durch die k übrigen ausdrücken; für jeden beliebigen Wert jeder dieser k Unbekannten kann man den Wert der $(k + 1)^{ten}$ bestimmen, welcher mit jenen der Gleichung genügt.

Die Anzahl der Wurzeln wird durch die Annahme beschränkt, daß die Unbekannten positive ganze Zahlen sein sollen.

Den einfachsten Fall einer unbestimmten Gleichung bildet eine Gleichung mit 2 Unbekannten von der Form $ax + by = c$, in welcher a, b, c als ganze positive oder negative Zahlen angenommen werden dürfen, die keinen gemeinschaftlichen Faktor enthalten; denn hätten a und b das gemeinschaftliche Maß m, so müßte, da auch x und y ganze Zahlen sein sollen, auch c eine ganze Zahl, also durch m teilbar sein. Da nun jedes gemeinschaftliche Maß von a und b auch ein Maß von c ist, so kann die Gleichung so umgeformt werden, daß a und b teilerfremd sind.

Lehrsatz 1. Jede Gleichung von der Form $ax + by = c$ hat ein ganzzahliges Wurzelpaar.

Beweis. Aus der Gleichung $ax + by = c$ folgt $y = \frac{c - ax}{b}$.

Setzt man nun für x die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . $(b - 1)$, so wird entsprechend: $y = \frac{c}{b}, \frac{c-a}{b}, \frac{c-2a}{b}, \ldots \frac{c-(b-1)a}{b}$.

Die Reste, welche diese Divisionen ergeben, sind aber sämtlich voneinander verschieden; denn wäre z. B. $c - ka = bq + r$, $c - la = bq' + r$, so müßte die Differenz der linken Seiten $la - ka$ oder $a(l - k) = (q - q')b$ sein, mithin $a(l - k)$ durch b, also auch, da a und b teilerfremd sind, nach § 40, L. 1, $l - k$ durch b aufgehen, was nicht sein kann, da $l - k < b$ ist.

Da mithin die b Reste sämtlich voneinander verschieden sind, jeder Rest $< b$ ist, so muß einer der Reste gleich Null, also der entsprechende

Digitized by Google

Quotient eine ganze Zahl sein. Es gibt daher einen ganzen Zahlwert von $x < b$, für welchen $(c - ax) : b$ also y eine ganze Zahl wird.

Zusatz. Der Beweis kann auch entsprechend für $ax - by = c$ und $ax - by = -c$ geführt werden.

Lehrsatz 2. Wenn die Werte $x = \alpha$, $y = \beta$ der Gleichung $ax + by = c$ oder $ax - by = c$ genügen, so müssen auch im ersten Falle $x = \alpha + nb$, $y = \beta - na$, im zweiten Falle $x = \alpha + nb$, $y = \beta + na$ der Gleichung genügen (n eine beliebige ganze Zahl).

Beweis. Durch Einsetzen der Werte von x und y in die gegebenen Gleichungen erhält man

im ersten Falle: $a\alpha + anb + b\beta - anb = c$, $a\alpha + b\beta = c$,

im zweiten Falle: $a\alpha + anb - b\beta - anb = c$, $a\alpha - b\beta = c$,

zwei nach Voraussetzung identische Gleichungen.

§ 91.*

Aufgabe 1. Die positiven ganzzahligen Wurzelpaare der Gleichung $8x - 11y = 25$ zu finden.

Auflösung (nach der Eulerschen Methode). Aus der gegebenen Gleichung findet man:

$$x = \frac{11y + 25}{8} = y + 3 + \frac{3y + 1}{8} = y + 3 + u,\ u = \frac{3y + 1}{8},\ \text{hieraus}$$

$$y = \frac{8u - 1}{3} = 2u + \frac{2u - 1}{3} = 2u + v,\ v = \frac{2u - 1}{3},\ \text{hieraus}$$

$$u = \frac{3v + 1}{2} = v + \frac{v + 1}{2} = v + w,\ w = \frac{v + 1}{2},\ \text{hieraus}$$

$$v = 2w - 1,\ u = 3w - 1,\ y = 8w - 3,\ x = 11w - 1.$$

Für $w = 1$ wird $y = 5$, $x = 10$, also

$$x = 10 + 11n = 10,\ 21,\ 32,\ 43\ \ldots\ldots$$
$$y = 5 + 8n = 5,\ 13,\ 21,\ 29\ \ldots\ldots$$

Aufgabe 2. Die positiven ganzzahligen Wurzelpaare der Gleichung $9x + 5y = 23$ zu finden.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung findet man:

$$y = \frac{23 - 9x}{5} = 4 - x + \frac{3 - 4x}{5} = 4 - x + u,\ u = \frac{3 - 4x}{5},\ \text{hieraus}$$

$$x = \frac{3 - 5u}{4} = -u + \frac{3 - u}{4} = -u + v,\ v = \frac{3 - u}{4},\ \text{hieraus}$$

$$u = 3 - 4v,\ x = 5v - 3,\ y = 10 - 9v.$$

Für $v = 1$ wird $x = 2$, $y = 1$, daher

$$x = 2 + 5n = 2,$$
$$y = 1 - 9n = 1.$$

Weitere Wertpaare für x und y sind unbrauchbar, da y negativ wird.

Digitized by Google

Aufgabe 3. Die pythagoreische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ aufzulösen.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$z^2 - y^2 = x^2, \quad \frac{z+y}{x} = \frac{x}{z-y}.$$

Setzt man diese Quotienten gleich $\frac{p}{q}$ $(p > q)$, so erhält man

$$z + y = \frac{p}{q}x, \qquad z - y = \frac{q}{p}x, \text{ also}$$

$$z = \frac{(p^2+q^2)x}{2pq}, \quad y = \frac{(p^2-q^2)x}{2pq}.$$

Diese Brüche werden ganze Zahlen, wenn

$$x = 2pq$$

wird. In diesem Falle wird

$$z = p^2 + q^2, \quad y = p^2 - q^2.$$

Für $p = 2$, $q = 1$ wird $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.
Für $p = 3$, $q = 1$ wird $x = 6$, $y = 8$, $z = 10$.
Für $p = 3$, $q = 2$ wird $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$.
Für $p = 4$, $q = 1$ wird $x = 8$, $y = 15$, $z = 17$ usw.

Will man für x, y, z nur teilerfremde Zahlen haben, so müssen p und q teilerfremd sein; denn hätten sie ein gemeinschaftliches Maß m, so würden x, y, z das gemeinschaftliche Maß m^2 haben. Sind ferner p und q ungerade, so ergeben sich für x, y, z gerade Zahlen. Es muß daher eine der Zahlen p, q gerade, die andere ungerade sein.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Die Progressionen und Kettenbrüche nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Von der arithmetischen Reihe.

§ 92.

Erklärung. Unter einer Reihe versteht man eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind. Die einzelnen Zahlen heißen die Glieder der Reihe und werden nach ihrer Stellenzahl das erste, zweite ..... n^{te} Glied genannt. Das erste Glied, von welchem man bei der Bildung der Reihe ausgeht, heißt das Anfangsglied, das n^{te} Glied, welches zugleich das Bildungsgesetz der Reihe erkennen läßt, das allgemeine Glied. Eine Reihe ist eine steigende oder eine fallende, je nachdem die aufeinanderfolgenden Glieder an Größe zunehmen oder abnehmen.

§ 93.

Erklärung. Eine arithmetische Reihe oder Progression ist eine solche, in welcher die Differenz je zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist. Die konstante Differenz heißt die Differenz der Reihe.

Folgerung 1. Jedes Glied wird aus dem vorhergehenden durch Addition der Differenz, aus dem folgenden durch Subtraktion der Differenz erhalten.

Folgerung 2. Die arithmetische Reihe ist eine steigende oder fallende, je nachdem die Differenz positiv oder negativ ist.

Aufgabe 1. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe zu finden, von welcher das Anfangsglied und die Differenz gegeben sind.

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangsglied der Reihe mit a, die Differenz mit d, so ist das

1te Gl., 2te Gl., 3te Gl., ... 8te Gl., ... n^{te} Gl.

$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad \cdots\ a+7d,\quad \cdots\ a+(n-1)d.$

Hat die Reihe n Glieder, so ist das n^{te} Glied zugleich das letzte Glied; es ist also, wenn dieses mit u bezeichnet wird,

$$u = a + (n-1)\,d. \qquad (111)$$

Aufgabe 2. Die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe zu finden, von welcher das Anfangsglied (a) und das n^{te} Glied (u) gegeben sind.

Digitized by Google

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Summe mit s, die Differenz mit d, so ist, da das n^{te} Glied gleich u ist, das $(n-1)^{te}$ Glied nach F. 1 gleich $u-d$, das $(n-2)^{te}$ gleich $u-2d$ usw. Man erhält daher, je nachdem man die Reihe mit dem ersten oder n^{ten} Gliede beginnt,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (u-2d) + (u-d) + u,$$
$$s = u + (u-d) + (u-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

oder, wenn man beide Gleichungen addiert,

$$2s = (a+u) + (a+u) + (a+u) + \cdots + (a+u) + (a+u), \quad (n\,\text{mal})$$
$$2s = n(a+u), \quad s = \frac{n(a+u)}{2}. \qquad (112)$$

Die Summe der n ersten Glieder ist daher gleich dem Produkte aus der Zahl der Glieder und dem arithmetischen Mittel des ersten und n^{ten} Gliedes.

Zusatz 1. Durch Einsetzen des Wertes von u aus Gl. (111) in Gl. (112) erhält man:

$$s = [2a + (n-1)d] \cdot \frac{n}{2} = n \cdot a + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d.$$

Zusatz 2. Für die n ersten natürlichen Zahlen ist

$$a = 1, \quad d = 1, \quad u = n, \quad \text{also } s = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Für die n ersten geraden natürlichen Zahlen ist

$$a = 2, \quad d = 2, \quad u = 2n, \quad \text{also } s = n(n+1).$$

Für die n ersten ungeraden Zahlen ist

$$a = 1, \quad d = 2, \quad u = 2n-1, \quad s = n^2.$$

Zusatz 3. Man bezeichnet mit

$$\sum_1^n k, \quad \sum_1^n 2k, \quad \sum_1^n (2k-1), \quad \sum_1^n (a + [k-1]d)$$

die Summen von Gliedern, welche man erhält, wenn man in das neben dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied für k alle Werte von 1 bis n setzt. Es ist daher

$$\sum_1^n [a + (k-1)d] = \frac{n(a+u)}{2}$$

$$\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_1^n 2k = n(n+1), \quad \sum_1^n (2k-1) = n^2. \qquad (112^*)$$

Zusatz 4. Da aus den zwei Gleichungen (111) und (112) nur zwei Unbekannte ermittelt werden können, so müssen von den fünf Größen a, d, n, u, s drei bekannt sein, wenn man eine oder zwei derselben berechnen will.

§ 94.

Beispiel 1. Zwischen zwei Zahlen a und b sollen m Zahlen, welche mit jenen eine arithmetische Reihe bilden, eingeschaltet (interpoliert) werden. Die Differenz der Reihe zu bestimmen.

Digitized by Google

Auflösung. Angenommen, die gesuchte Differenz sei x, so folgt aus (111), da das Anfangsglied der Reihe a, das Endglied b, die Anzahl der Glieder (m + 2) ist,

$$b = a + (m + 1)x, \quad x = \frac{b - a}{m + 1}.$$

Sind a und b zwei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist $b - a = d$, $x = \frac{d}{m + 1}$.

Beispiel 2. Die Summe aller vierzifferigen Zahlen zu berechnen.

Auflösung. Sie bilden eine arithmetische Reihe, in welcher $a = 10^3$, $u = 10^4 - 1$, $d = 1$, also $n = 10^4 - 10^3 = 9 \cdot 10^3$ ist, daher ihre Summe gleich $\frac{1}{2}(10^3 + 10^4 - 1)\, 9 \cdot 10^3 = 49495500$.

Beispiel 3. Von zwei um 260 km entfernten Orten gehen A und B einander entgegen. Nach wieviel Tagen treffen sie zusammen, wenn A am ersten Tage 30 km, jeden folgenden Tag 4 km weniger, und B am ersten Tage 36 km, jeden folgenden 3 km weniger zurücklegt?

Auflösung. Angenommen, sie treffen nach x Tagen zusammen. Die von A in x Tagen zurückgelegten Wege bilden eine arithmetische Reihe, in welcher $a = 30$, $d = -4$, $n = x$ ist, daher das Endglied $u = 30 - 4(x - 1)$, die Summe der Wege $s = \frac{1}{2}x[60 - 4(x - 1)]$. Die von B in x Tagen zurückgelegten Wege bilden eine arithmetische Reihe, in welcher $a = 36$, $d = -3$, $n = x$ ist, daher das Endglied $u = 36 - 3(x - 1)$, die Summe der Wege $s = \frac{1}{2}x[72 - 3(x - 1)]$. Da nun die Summe der von A und B in x Tagen zurückgelegten Wege gleich 260 km sein soll, so erhält man die Gleichung

$$x \cdot [60 - 4(x - 1)] + x[72 - 3(x - 1)] = 520; \quad x_1 = 5, \; x_2 = 14\tfrac{4}{7}.$$

Nach 5 Tagen treffen A und B zusammen. Der andere Wert von x drückt aus, daß sie noch einmal sich begegnen, nachdem die Richtung ihrer Bewegung sich umgekehrt hat.

---

2. Kapitel. Von der geometrischen Reihe.

§ 95.

Erklärung. Eine geometrische Reihe oder Progression ist eine solche, in welcher der Quotient aus je zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist. Der konstante Quotient heißt der Quotient der Reihe.

Folgerung 1. Jedes Glied wird aus dem vorhergehenden durch Multiplikation, aus dem folgenden durch Division mit dem Quotienten erhalten.

Folgerung 2. Die geometrische Reihe ist eine steigende oder fallende, je nachdem der Quotient größer oder kleiner als 1 ist.

Digitized by Google

Aufgabe 1. Das allgemeine Glied einer geometrischen Reihe zu finden, von welcher das Anfangsglied und der Quotient gegeben sind.

Auflösung. Bezeichnet man das Anfangsglied mit a, den Quotienten mit q, so ist das

$$\begin{array}{cccccc} 1^{te}\,Gl., & 2^{te}\,Gl., & 3^{te}\,Gl., \cdots & 8^{te}\,Gl., & \cdots & n^{te}\,Gl. \\ a, & aq, & aq^2, & a\cdot q^7, & \cdots & aq^{n-1}. \end{array}$$

Hat die Reihe n Glieder, so ist das n^{te} Glied zugleich das letzte; daher ist, wenn man dieses mit u bezeichnet,

$$u = aq^{n-1}. \tag{113}$$

Aufgabe 2. Die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe zu finden, von welcher das Anfangsglied (a) und der Quotient (q) gegeben sind.

Auflösung. Bezeichnet man die gesuchte Summe mit s, so ist:

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$

folglich
$$s\cdot q = \quad aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n.$$

Subtrahiert man letztere Gleichung von der ersten, so erhält man:

$$s(1-q) = a - aq^n = a(1-q^n),$$

folglich
$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}. \tag{114}$$

Zusatz 1. Da aus den Gleichungen (113) und (114) nur zwei Unbekannte ermittelt werden können, so müssen von den fünf Größen a, q, n, u, s drei bekannt sein, wenn man eine oder zwei derselben berechnen will.

Unter den sich ergebenden 20 Gleichungen sind vier Gleichungen vom n^{ten} Grade, nämlich diejenigen, welche q und u durch a, s, n, und diejenigen, welche q und a durch n, s, u ausdrücken. Die übrigen Gleichungen lassen sich nach den bekannten Methoden lösen.

Zusatz 2. Summiert man die geometrische Reihe

$$a^{n-1},\ a^{n-2}b,\ a^{n-3}b^2, \cdots ab^{n-2},\ b^{n-1},$$

deren Quotient $\frac{b}{a}$ und deren Gliederzahl n ist, so erhält man

$$s = \frac{a^{n-1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1\right]}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^n\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1\right]}{b-a} = \frac{b^n - a^n}{b-a} = \frac{a^n - b^n}{a-b},$$

folglich
$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}.$$

Für $a = x$, $b = 1$ geht sie über in

$$\frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{115}$$

Digitized by Google

Für $n = 2m + 1$ und $b = -c$, also $b^n = -c^{2m+1}$ in

$$\frac{a^{2m+1} + c^{2m+1}}{a + c} = a^{2m} - a^{2m-1} \cdot c + a^{2m-2} \cdot c^2 - \ldots + c^{2m}.$$

Für $n = 2m$ und $b = -c$, also $b^{2m} = c^{2m}$, in

$$\frac{a^{2m} - c^{2m}}{a + c} = a^{2m-1} - a^{2m-2} \cdot c + a^{2m-3} c^2 - \ldots - c^{2m-1}.$$

Aufgabe. Zwischen zwei Zahlen a und b sollen m Zahlen, welche mit jenen eine geometrische Reihe bilden, eingeschaltet werden; den Quotienten der Reihe zu bestimmen.

Auflösung. Angenommen, der gesuchte Quotient sei x, dann folgt aus (113), da das Anfangsglied der Reihe a, das Endglied b, die Gliederzahl $m + 2$ ist:

$$b = a x^{m+1}, \quad x = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Sind a und b zwei aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe, so ist

$$b = aq, \quad x = \sqrt[m+1]{q}.$$

§ 96.

Erklärung 1. Eine Reihe, deren Gliederzahl unendlich groß gedacht werden soll, heißt eine unendliche Reihe. Halbiert man einen Apfel, fügt zu der einen Hälfte die Hälfte der anderen, dazu die Hälfte des übrig bleibenden Viertels, dazu die Hälfte des übrig bleibenden Achtels und so immer fort, so erhält man die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots \text{ Apfel},$$

deren Grenzwert sich offenbar ins Unbeschränkte dem ganzen Apfel oder, wenn man von der Benennung absieht, der Eins nähert.

Erklärung 2. Eine unendliche Reihe heißt konvergent, wenn die Summe einer endlichen Anzahl ihrer Glieder bei immer wachsender Gliederzahl sich unbeschränkt einem endlichen Grenzwerte nähert. Der Grenzwert heißt die Summe der Reihe. Hierdurch ist der Begriff Summe auch auf eine unendliche Zahl von Summanden übertragen. Eine unendliche Reihe heißt divergent, wenn sie keine angebbare endliche Summe besitzt.

Lehrsatz 1. Die Glieder einer fallenden geometrischen Reihe nähern sich bei immer wachsender Zahl unbeschränkt dem Grenzwerte Null.

Beweis. Jeder echte Bruch wird durch Potenzieren mit einer ganzen positiven Zahl verkleinert.

$$\frac{9}{10} > \frac{81}{100} > \frac{729}{1000} > \frac{6561}{10000} > \frac{59049}{100000}.$$

Digitized by Google

Dies ist kleiner als $\frac{6}{10}$. Die Potenzen von $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ werden also kleiner als die von $\frac{6}{10}$ sein.

$$\left(\frac{6}{10}\right)^5 = \frac{7776}{100000} < \frac{8}{100}$$
$$\left(\frac{8}{10^2}\right)^5 = \frac{32768}{10^{10}} < \frac{4}{10^{10}}$$
$$\therefore \left(\frac{9}{10}\right)^{125} < \frac{4}{10^{10}}$$

Durch fortgesetztes Potenzieren kann man also jeden echten Bruch unter jede beliebige Grenze bringen, dies schreibt man in der Form $\lim \left[\frac{a}{a+1}\right]^n_{n=\infty} = 0$. Ist q ein echter Bruch, so ist $\lim \left[q^n\right]_{n=\infty} = 0$.

Lehrsatz 2. Die Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe, von welcher das Anfangsglied a und der Quotient q gegeben sind, ist $\frac{a}{1-q}$.

Behauptung.
$$\sum_{k=1}^{k=\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}. \qquad (116)$$

Beweis. Für jede endliche geometrische Reihe ist

$$s = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Es sei $a = 1000$, $q = \frac{9}{10}$. Summiert man die ersten 125 Glieder, so erhält man $s = \frac{1000}{1-\frac{9}{10}} - \frac{1000\cdot(\frac{9}{10})^{125}}{1-\frac{9}{10}} \sim 10000 - \frac{4}{1000000}$, wenn man für $\left(\frac{9}{10}\right)^{125}$ das nach dem vorigen Beweis größere $\frac{4}{10^{10}}$ einsetzt. In Wahrheit ist der Subtrahend noch kleiner, also kommt die Summe der 10000 noch näher. Nimmt man 1000 Glieder, so wird der Subtrahend noch kleiner und nähert sich bei wachsender Gliederzahl immer mehr der Null. Nach Erklärung 2 ist deshalb der Minuend als die Summe der unendlich vielen Glieder zu betrachten. Allgemein ist bei wachsendem n

$$\lim [s]_{n=\infty} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot \lim [q^n]_{n=\infty}.$$

Da nach dem Lf. 1 $\lim [q^n]_{n=\infty} = 0$, so fällt das zweite Glied fort, und die Summe besteht nur aus dem ersten Glied.

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Digitized by Google

Anmerkung. Dividiert man a durch $1-q$, so erhält man

$$\begin{array}{l} a \quad :(1-q) = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \\ \underline{a - aq} \\ \quad + aq \\ \quad \underline{+ aq - aq^2} \\ \qquad + aq^2 \\ \qquad \cdots \end{array}$$

Diese Division hat nur Sinn, wenn die Reste andauernd kleiner werden, das ist der Fall, wenn $q < 1$ ist. Da

$$a:(1+q) = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - \cdots,$$

gilt der Satz auch, wenn q ein negativer echter Bruch ist.

Lehrsatz 3. Jeder periodische Dezimalbruch kann als eine fallende geometrische Reihe aufgefaßt und entsprechend summiert werden.

Beispiel. $0{,}2727\cdots = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \cdots$

$$a = \frac{27}{100}, \qquad q = \frac{1}{100}, \qquad s = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{3}{11}.$$

Lehrsatz 4. Jeder unendliche Dezimalbruch hat eine endliche Summe.

Beweis. Der größte Dezimalbruch ist $0{,}99\cdots$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots, \qquad a = \frac{9}{10}, \qquad q = \frac{1}{10}, \qquad s = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$$

Anmerkung. Auf diesem Satz beruht die unbedenkliche Verwendung der unendlich langen aber nicht unendlich großen irrationalen Zahlen in jeder endlichen Rechnung.

---

3. Kapitel. Von der Zinseszins- und Rentenrechnung.

§ 97.

Erklärung. Die Zinseszinsrechnung beschäftigt sich mit der Vergrößerung eines Kapitals durch Zinsen, wenn diese an jedem Zahlungstermine zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinst werden.

Aufgabe. Den Wert eines zu p % auf Zinseszins ausgeliehenen Kapitals von k ℳ nach n Jahren zu bestimmen.

Auflösung. Das Kapital k bringt in 1 Jahre $\frac{kp}{100}$ ℳ Zinsen. Fügt man dieselben zum Kapitale k, so wird sein Wert einschließlich der Zinsen am Ende des ersten Jahres

$$w_1 = k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Digitized by Google

und, setzt man den Faktor $1+\frac{p}{100}$, welcher der Vermehrungsfaktor des Kapitals genannt wird und unabhängig von der Größe des Kapitals ist, gleich q, so wird

$$w_1 = k \cdot q. \tag{117}$$

Der Wert eines Kapitals nach einem Jahre wird also erhalten, wenn man das Kapital mit dem Vermehrungsfaktor multipliziert.

Im zweiten Jahre steht nun das Kapital kq auf Zinsen, folglich ist sein Wert am Ende des zweiten Jahres $w_2 = kq \cdot q = kq^2$, am Ende des dritten Jahres $w_3 = kq^3$, also am Ende des n^{ten} Jahres

$$w_n = w = kq^n. \tag{118}$$

Anmerkung 1. Werden die Zinsen halbjährig zum Kapital geschlagen und beträgt der jährliche Zinsfuß $p\,\%$, so ergibt sich der halbjährige $p_2\,\%$ aus der Überlegung, daß das Endkapital in beiden Fällen das gleiche sein muß, d. h.

$$k\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2,$$

denn bei halbjähriger Zinszahlung steht das Kapital im 2. Halbjahr auf Zinseszinsen. Demnach ist

$$1+\frac{p}{100} = \left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2$$

$$\frac{p}{100} = 2\,\frac{p_2}{100} + \frac{{p_2}^2}{10000}.$$

Da $\frac{p_2}{100}$ eine kleine Zahl ist, vernachlässigt man $\frac{{p_2}^2}{10000}$ und nennt den so gewonnenen Zinsfuß den konformen. Es ist dann $p_2 = \frac{p}{2}$, $p_4 = \frac{p}{4}$. Bei genauen Rechnungen würde man $q_n = \sqrt[n]{q}$ setzen, sonst rechnet man bei $4\,\%$ jährlichen Zinsen $1\,\%$ vierteljährlichen Zins.

Zusatz. Aus Gl. (118) ergibt sich:

$$k = \frac{w}{q^n},\quad q = \sqrt[n]{\frac{w}{k}},\quad p = 100(q-1),\quad n = \frac{\log w - \log k}{\log q} \tag{118*}$$

Anmerkung 2. Auch bei anderen Dingen, welche wie Kapitalien zunehmen, z. B. bei dem Bestande eines Waldes, der Bevölkerung eines Landes, finden die Formeln (118) und (118*) Anwendung.

§ 98.

Aufgabe. Den Wert eines zu $p\,\%$ auf Zinseszinsen ausgeliehenen Kapitals von k ℳ nach n Jahren zu berechnen, wenn es am Ende jedes Jahres um r ℳ vermehrt wird.

Digitized by Google

Auflösung. Setzt man den Vermehrungsfaktor gleich q, die Werte des Kapitals am Ende der einzelnen Jahre gleich $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n = w$, so ist

$$w_1 = kq + r,$$
$$w_2 = (kq + r)\,q + r = kq^2 + rq + r,$$
$$w_3 = (kq^2 + rq + r)q + r = kq^3 + rq^2 + rq + r, \text{ also}$$
$$w_n = w = kq^n + rq^{n-1} + rq^{n-2} + \cdots + rq + r,$$
$$= kq^n + (r + rq + rq^2 + \cdots + rq^{n-2} + rq^{n-1}),$$

$$\boldsymbol{w = kq^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}}. \qquad (119)$$

Zusatz 1. Wird am Ende eines jeden Jahres ein dem ursprünglichen Kapitale gleiches Kapital hinzugefügt, so erhält man, da $k = r$ ist,

$$w = \frac{rq^n(q-1) + r(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{r(q^{n+1} - 1)}{q - 1}.$$

Zusatz 2. Werden von dem ursprünglichen Kapitale am Ende jedes Jahres r ℳ weggenommen, so geht (119) über in:

$$\boldsymbol{w = kq^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}}. \qquad (119^*)$$

Folgerung. Das Kapital k wird, wenn die jährlich in Abzug gebrachte Summe die jährlichen Zinsen des Kapitals übersteigt, sich mehr und mehr vermindern. Es wird gänzlich erschöpft, aufgezehrt sein, wenn

$$\boldsymbol{w = 0,\ kq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}} \text{ ist.} \qquad (120)$$

Daraus ergibt sich:

$$\boldsymbol{k = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}}, \qquad \boldsymbol{r = \frac{kq^n(q - 1)}{q^n - 1}},$$
$$\boldsymbol{n = \frac{\log r - \log[r - k(q - 1)]}{\log q}}. \qquad (120^*)$$

§ 99.

Erklärung. Unter einer Rente versteht man eine am Ende eines jeden Jahres oder auch eines anderen Zeitabschnittes zu zahlende Summe, unter dem Endwerte einer n mal sich wiederholenden Rente die Summe, zu welcher sämtliche Renten mit ihren Zinseszinsen anwachsen, unter dem Barwerte (Ablösungskapitale) einer n mal sich wiederholenden Rente das Kapital, dessen um die Zinseszinsen in n Jahren vermehrter Wert gleich dem Endwerte der Rente ist.

Aufgabe 1. Den Endwert einer n mal sich wiederholenden Rente zu berechnen.

Auflösung. In (119) ist $k = 0$ zu setzen, daher

$$w = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Digitized by Google

Aufgabe 2. Den Barwert einer nmal sich wiederholenden Rente zu berechnen.

Auflösung. Der gesuchte Barwert x wächst durch die njährigen Zinseszinsen zur Summe xq^n. Da diese gleich dem Endwerte der Rente sein soll, so hat man nach voriger Aufgabe:

$$xq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}, \qquad x = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

Aufgabe 3. Ein zu $p\,\%$ ausgeliehenes Kapital k soll durch jährliche Zinszahlungen zu höheren Prozenten in n Jahren getilgt (amortisiert) werden. Zu wieviel Prozenten müssen die jährlichen Zinszahlungen erfolgen?

Auflösung. Setzt man die gesuchten Prozente gleich x, so bildet der Betrag der jährlichen Zinszahlung $kx : 100$ die nmal sich wiederholende Rente, deren Endwert gleich dem um die Zinseszinsen vermehrten Kapitalwerte (kq^n) sein muß, wo $q = 1 + p : 100$ ist. Setzt man daher in (120) $r = kx : 100$, so erhält man:

$$kq^n = \frac{kx}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad x = \frac{100\,q^n(q-1)}{q^n - 1}.$$

---

4. Kapitel.* Von den einfachen Kettenbrüchen.

§ 100.*

Erklärung. Eine gemischte Zahl von der Form

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}} = q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots$$

heißt ein einfacher Kettenbruch. Er kann endlich oder unendlich, im letzteren Falle periodisch oder unperiodisch sein. Bricht man einen Kettenbruch ab, so erhält man einen Näherungswert.

q_0 kann auch Null sein, der Kettenbruch heißt dann echt.

§ 101.*

Aufgabe 1. Einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

$$\frac{29}{139} = \frac{1}{139 : 29} = \frac{1}{4 + \frac{23}{29}}, \qquad \frac{23}{29} = \frac{1}{29 : 23} = \frac{1}{1 + \frac{6}{23}}$$

$$\frac{6}{23} = \frac{1}{23 : 6} = \frac{1}{3 + \frac{5}{6}}, \qquad \frac{5}{6} = \frac{1}{6 : 5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

$$\frac{29}{139} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}.$$

Digitized by Google

Die Teilnenner erhält man durch das bei Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes benutzte Verfahren.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \overset{4}{\smile} & & \overset{1}{\smile} & & \overset{3}{\smile} & & \overset{1}{\smile} & & \overset{5}{\smile} & \\ 139 & : & 29 & : & 23 & : & 6 & : & 5 & : & 1 \\ 116 & & 23 & & 18 & & 5 & & 5 & & \\ \hline 23 & & 6 & & 5 & & 1 & & 0 & & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r|r|r} 139 & 29 & 4 \\ 116 & 23 & 1 \\ \hline 23 & 6 & 3 \\ 18 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & 5 \end{array}$$

Aufgabe 2. Die Näherungswerte eines echten Kettenbruches zu bestimmen.

$$\frac{1}{4} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{3} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{5}.$$

Erster Näherungswert: $\frac{1}{4}$.

Zweiter Näherungswert: $\dfrac{1}{4+\frac{1}{1}} = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$.

Dritter Näherungswert: $\dfrac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{4+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{4+\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{19}$.

Vierter Näherungswert: $\frac{1}{4} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{3} \dot{+} \frac{1}{1} = \frac{1}{4} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \dot{+} \frac{4}{5} = \frac{5}{24}$.

Fünfter Wert: $\underbrace{\frac{1}{4} \dot{+} \frac{1}{1}}_{\frac{29}{139}} \underbrace{\dot{+} \frac{1}{3}}_{\frac{23}{29}} \underbrace{\dot{+} \frac{1}{1}}_{\frac{6}{23}} \underbrace{\dot{+} \frac{1}{5}}_{\frac{5}{6}}$.

Abgekürztes Verfahren.

Nullter Näherungswert: $\frac{0}{1}$.

Erster Näherungswert: $\frac{1}{4}$.

Zweiter Näherungswert Nenner 1: $\dfrac{0+1\cdot 1}{1+4\cdot 1} = \dfrac{1}{5}$

Dritter Näherungswert Nenner 3: $\dfrac{1+1\cdot 3}{4+5\cdot 3} = \dfrac{4}{19}$

Vierter Näherungswert Nenner 1: $\dfrac{1+4\cdot 1}{5+19\cdot 1} = \dfrac{5}{24}$

Fünfter Näherungswert Nenner 5: $\dfrac{4+5\cdot 5}{19+24\cdot 5} = \dfrac{29}{139}$

Digitized by Google

Kürzer geschrieben:

	4	1	3	1	5
0	1	1	4	5	29
1	4	5	19	24	139

Die allgemeine Formel zu Berechnung des n^{ten} Näherungswertes $\frac{a_n}{b_n}$ lautet:

$$\frac{a_{n-2} + a_{n-1} \cdot q_n}{b_{n-2} + b_{n-1} \cdot q_n} = \frac{a_n}{b_n} \qquad (121)$$

Der Beweis wird durch den Schluß von n auf $n+1$ geführt (s. § 103 Anm.).

Beispiel. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

	2	3	4	5	6
0	1	3	13	68	421
1	2	7	30	157	972

§ 102.*

Lehrsatz 1. Die ungeraden Näherungswerte sind größer, die geraden kleiner als der Wert eines echten Kettenbruches.

Der Beweis ergibt sich aus dem Satz, daß ein Bruch kleiner wird, wenn sein Nenner größer wird.

In dem Beispiel § 101 ist

$$\frac{1}{4} > \frac{4}{19} > \frac{29}{139} > \frac{5}{24} > \frac{1}{5}.$$

Zusatz. Der Wert eines Kettenbruches liegt zwischen je zwei benachbarten Näherungswerten.

Lehrsatz 2. Die Differenz zweier aufeinander folgenden Näherungswerte hat den Zähler -1 oder $+1$.

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n \cdot b_{n+1}}. \qquad (122)\ (123)$$

Beweis wie bei (121) (s. § 103 Anm.),

z. B. $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{5} - \frac{4}{19} = -\frac{1}{5 \cdot 19}$, $\frac{4}{19} - \frac{5}{24} = \frac{1}{19 \cdot 24}$.

Folgerung. Die Näherungswerte nähern sich ständig dem Wert des Kettenbruches (124).

Lehrsatz 3. Jeder Näherungswert kommt dem Werte des vollständigen Kettenbruches näher als irgend ein anderer Bruch mit kleinerem Nenner.

Zähler und Nenner des Näherungswertes sind teilerfremd.

Der Beweis wird indirekt aus (122) geführt.

Beispiel: $\frac{29}{139} - \frac{5}{24} = \frac{1}{139 \cdot 24} < \frac{29}{139} - \frac{5}{23}$.

Digitized by Google

§ 103.

Beispiel 1. Die Zahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln und seine Näherungswerte zu berechnen.

Auflösung:

31415926	10000000	3
30000000	9911482	7
1415926	88518	15
88518	88156	1
530746	362	243
442590		
88156		

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{243} + \ldots}}}$$

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{3}{1},\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{22}{7},\ \frac{a_2}{b_2} = \frac{333}{106},\ \frac{a_3}{b_3} = \frac{355}{113}\ \ldots$$

Beispiel 2. Die Quadratwurzel aus 3 in einen Kettenbruch zu verwandeln und Näherungswerte zu berechnen.

Auflösung: $\sqrt{3} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{1} = 1 + \dfrac{1}{q_1}$,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \frac{1}{q_2},$$

$$q_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{1} = 2 + \frac{1}{q_3},$$

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \frac{1}{q_4},\ \text{usw.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\right)',\ \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{1},\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{1},\ \overset{(2)}{\frac{a_2}{b_2}} = \frac{5}{3},\ \overset{(1)}{\frac{a_3}{b_3}} = \frac{7}{4},\ \overset{(2)}{\frac{a_4}{b_4}} = \frac{19}{11}\ \ldots$$

Beispiel 3. log 5 in einen Kettenbruch zu verwandeln und Näherungswerte zu berechnen.

Auflösung. Man setze $\log 5 = x$, also $5 = 10^x$.

$5 = 10^x,\ 1 > x > 0,\ x = \dfrac{1}{m},\ \therefore 5 = 10^{\frac{1}{m}}$.

$10 = 5^m,\ 2 > m > 1,\ m = 1 + \dfrac{1}{n},\ \therefore 10 = 5 \cdot 5^{\frac{1}{n}},\ 2 = 5^{\frac{1}{n}}$.

$5 = 2^n,\ 3 > n > 2,\ n = 2 + \dfrac{1}{r},\ \therefore 5 = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{r}},\ \dfrac{5}{4} = 2^{\frac{1}{r}}$.

$2 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^r,\ 4 > r > 3,\ r = 3 + \dfrac{1}{p},\ 2 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{p}},\ \dfrac{128}{125} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Digitized by Google

$\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^p$, $10 > p > 9$, $p = 9 + \frac{1}{s}$ usw.

$$\log 5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{3}, \quad \overset{(3)}{\frac{a_3}{b_3}} = \frac{7}{10}, \quad \overset{(9)}{\frac{a_4}{b_4}} = \frac{65}{93} = 0{,}6989.$$

Anmerkung. Zum Beweis der Formel (121) ersetzt man q_n durch $q_n + 1 : q_{n+1}$, wenn man zum $n+1^{ten}$ Näherungswert übergehen will, und erhält

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-2} + a_{n-1}(q_n + 1 : q_{n+1}) \\ &= a_{n-2} + a_{n-1} \cdot q_n + a_{n-1} : q_{n+1} \\ &= a_n + a_{n-1} : q_{n+1} \\ b_{n+1} &= b_n + b_{n-1} : q_{n+1}, \end{aligned}$$

also, wenn man Zähler und Nenner mit q_{n+1} erweitert:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_n \cdot q_{n+1}}{b_{n-1} + b_n \cdot q_{n+1}}.$$

Gilt der Satz also für n, so gilt er auch für $n+1$. Für $n=2$ ist er leicht darzutun, also gilt er auch für $n=3$, $n=4$ usw.

Ähnlich beweist man die Formel 122. Ist $a_{n-1} \cdot b_n - a_n \cdot b_{n-1} = (-1)^n$, so ist nach (121) $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = a_n \cdot b_{n-1} + a_n b_n q_n - a_{n-1} b_n - a_n b_n q_n = -(a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Da $b_n < b_{n+1}$ und $b_n^2 < b_n \cdot b_{n+1}$ ist, wird

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right| < \frac{1}{b_n^2}.$$

Da $\frac{a}{b}$ zwischen den Näherungswerten liegt, ist also auch

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n^2}. \tag{124}$$

Digitized by Google

Siebenter Abschnitt.

Die Kombinationslehre nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Von den Permutationen.

§ 104.

Erklärung. Die Kombinationslehre im weiteren Sinne ist die Lehre von den Zusammenstellungen gegebener Dinge. Jede solche Zusammenstellung heißt eine Form oder Komplexion. Die zusammenzustellenden Dinge werden Elemente genannt und durch Buchstaben a, b, c, d .. oder durch die Ziffern 1, 2, 3 .. bezeichnet. Man denkt sich die Elemente zunächst in einer bestimmten Reihenfolge gegeben, die Buchstaben in alphabetischer, die Ziffern in ihrer natürlichen Reihenfolge. Man unterscheidet sie in niedere und höhere, je nachdem sie in der Anfangsstellung dem Anfangselemente näher oder entfernter sind (c höher als b), in frühere und spätere nach ihrer Stellung in einer beliebigen Form. (In bcad sind b, c frühere Elemente als a.)

Treten alle gegebenen Elemente in einer Komplexion zusammen, so heißt sie eine Permutation. Diese ist daher jede Umstellung von Elementen, bei welcher nur die Reihenfolge derselben in Betracht kommt. Das Aufsuchen dieser Komplexionen wird Permutieren genannt. Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen wird mit P_n bezeichnet.

§ 105.

Lehrsatz 1. Die Anzahl der Permutationen von $(n+1)$ verschiedenen Elementen (P_{n+1}) ist $(n+1)$ mal so groß als die Permutationszahl (P_n) von n verschiedenen Elementen.

Behauptung. $P_{(n+1)} = (n+1) \cdot P_n$.

Beweis. Kommt zu den n Elementen $a_1\, a_2 \cdot\cdot a_n$ ein $(n+1)^{\text{tes}}$ Element a_{n+1} hinzu, so kann es in jeder Permutation von n Elementen $(n+1)$ Stellungen einnehmen. Aus jeder Permutation von n Elementen werden $(n+1)$ Permutationen von $(n+1)$ Elementen; also ist die Anzahl der Permutationen von $(n+1)$ Elementen $(n+1)$ mal so groß als die von n Elementen.

Folgerung. Da $P_2 = 1 \cdot 2$ ist, so folgt $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, allgemein

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n. \qquad (125)$$

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n bezeichnet man mit n! und spricht es „n Fakultät“. Obige Gleichung kann also geschrieben werden: $P_n = n!$

Digitized by Google

Lehrsatz 2. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen p identisch sind, ist gleich der Permutationszahl von n Elementen, dividiert durch die Permutationszahl von p Elementen.

Behauptung. $${}_{p}P_{n} = \frac{P_n}{P_p} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} = \frac{n!}{p!} \qquad (126)$$

Beweis. Angenommen, es wären die n Elemente voneinander verschieden, so würde ihre Permutationszahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ sein. Sind aber von diesen n Elementen p identisch, so fallen alle diejenigen Permutationen, welche sich nur durch verschiedene Stellung dieser p Elemente unterscheiden, also $P_p = p!$ Permutationen in eine zusammen. Die Zahl, welche ausdrückt, wievielmal P_p in P_n enthalten ist, gibt also die Anzahl der voneinander verschiedenen Permutationen an, also ist

$${}_{p}P_{n} = P_n : P_p = n! : p!$$

Zusatz. Wenn unter den n Elementen das eine Element p mal, das andere Element r mal sich wiederholt, so ist die Permutationszahl

$${}_{p,r}P_{n} = \frac{P_n}{P_p \cdot P_r} = \frac{n!}{p! \cdot r!}. \qquad (126^*)$$

§ 106.

Zur Bildung aller Permutationen gegebener Elemente benutzt man zwei Methoden. Man verfährt entweder schrittweise, d. h. man geht von jeder Permutation zur nächsten durch Platzvertauschung von zwei Elementen über, oder lexikalisch nach Art der Ordnung der Wörter im Lexikon.

1. Bei dem lexikalischen Verfahren leitet man aus irgendeiner Form (dbeca) die nächstfolgende ab, indem man, von rechts nach links gehend, das erste niedere Element (b), neben welchem rechts ein höheres (e) steht, aufsucht, die Elemente links davon (d) unverändert läßt, das nächst höhere (c) der rechts stehenden an die Stelle jenes niederen (b) setzt und diesem die übrigen Elemente (abe) in alphabetischer Ordnung folgen läßt. So erhält man von den Elementen a, b, c die Permutationen

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

2. Bei schrittweisem Verfahren sind die Permutationen der Elemente a, b: ab und ba, die der 3 Elemente 1, 2, 3 sind: 123, 132, 231, 213, 312, 321. Sie zerfallen in drei Gruppen, welche mit 1 bzw. 2 bzw. 3 beginnen. Die Formen jeder Gruppe erhält man durch Permutieren der beiden letzten Elemente. Von einer Gruppe geht man zur nächsten durch Platzvertauschung zweier Elemente über.

Die Permutationen der Elemente a, b, c, d sind:

abcd,	abdc,	acdb,	acbd,	adbc,	adcb,
bdca,	bdac,	bcad,	bcda,	badc,	bacd,
cabd,	cadb,	cbda,	cbad,	cdab,	cdba,
dcba,	dcab,	dbac,	dbca,	dacb,	dabc.

Digitized by Google

Sie zerfallen bei der Einteilung nach ihren Anfangselementen in vier Gruppen. Die Formen jeder Gruppe erhält man durch Permutieren der drei letzten Elemente nach 2. Von einer Gruppe geht man zur folgenden schrittweise über.

---

2. Kapitel. Von den Kombinationen.

A. Kombinationen mit Versetzung oder Variationen.

§ 107.

Treten nicht alle gegebenen Elemente, sondern nur eins oder mehrere derselben zu einer Komplexion zusammen, so heißt sie eine **Kombination**. Diese ist daher die Zusammenstellung einer bestimmten Anzahl gegebener Elemente. Die Anzahl der Elemente bestimmt die Klasse der Kombination. Die Kombinationen der 1. Klasse bestehen aus 1 Element und heißen Unionen, die der 2. Klasse bestehen aus 2 Elementen und heißen Amben, die der 3. Klasse heißen Ternen, die der 4. Klasse Quaternen usw.

Je nachdem die Kombinationen, welche sich nur durch verschiedene Stellung der Elemente voneinander unterscheiden, als verschiedene Formen gezählt werden oder nicht, teilt man die Kombinationen ein in solche mit und ohne Versetzung. Die Kombinationen mit Versetzung heißen Variationen (Zusammenstellungen), die Kombinationen ohne Versetzung auch kurzweg Kombinationen (Auslesen).

Endlich unterscheidet man noch Kombinationen mit und ohne Wiederholung, je nachdem dasselbe Element in einer Form mehrmals oder nur einmal auftreten darf. Es bezeichnet

${}^{k}_{m}V_n$ die Anzahl der Variationen der k^{ten} Klasse von n Elementen mit Wiederholung, ${}^{k}_{o}V_n$ die Anzahl der Variationen der k^{ten} Klasse von n Elementen ohne Wiederholung, ${}^{k}_{m}C_n$ die Anzahl der Kombinationen der k^{ten} Klasse von n Elementen ohne Versetzung und mit Wiederholung, ${}^{k}_{o}C_n$ die der Kombinationen der k^{ten} Klasse von n Elementen ohne Versetzung und ohne Wiederholung.

§ 108.

Lehrsatz 1. $${}^{k}_{m}V_n = n^k. \qquad (127)$$

Beweis. 1. Es seien gegeben die n Unionen $a_1, a_2, \cdots a_n$. Jede Union kann sich mit n Elementen zu einer Ambe verbinden; aus jeder Union entstehen daher n Amben, also aus n Unionen n^2 Amben, daher ist ${}^{2}_{m}V_n = n^2$.

2. Jede Ambe kann sich mit n Elementen zu einer Terne verbinden, aus n^2 Amben entstehen daher $n^2 \cdot n = n^3$ Ternen, daher ist ${}^{3}_{m}V_n = n^3$.

3. So fortfahrend findet man ${}^{k}_{m}V_n = n^k$.

Lehrsatz 2. $${}^{k}_{o}V_n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1). \qquad (128)$$

Beweis. 1. Es seien gegeben die Unionen $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$. Jede Union ($a_3$) kann sich mit allen Elementen, ausgenommen mit sich selbst, also mit

Digitized by Google

(n — 1) Elementen zu einer Ambe verbinden, aus jeder Union entstehen daher (n — 1) Amben, also ist die Anzahl der Amben (n — 1) mal so groß als die der Unionen, mithin ${}^{2}_{0}V_{n} = n(n-1)$.

2. Jede Ambe ($a_3\ a_4$) kann sich mit (n — 2) Elementen zu einer Terne verbinden; aus jeder Ambe entstehen daher (n — 2) Ternen, also ist die Anzahl der Ternen (n — 2) mal so groß als die der Amben, mithin

$${}^{3}_{0}V_{n} = n(n-1)(n-2).$$

3. So fortfahrend findet man ${}^{k}_{0}V_{n} = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

B. Kombinationen ohne Versetzung.

§ 109.

Lehrsatz. $${}^{k}_{0}C_{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k}. \qquad (129)$$

Beweis. 1. Es seien die Elemente $a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n$ gegeben. Von den Amben derselben mit Versetzung und ohne Wiederholung (${}^{2}_{0}V_{n}$) fallen, wenn die Versetzung der Elemente ausgeschlossen wird, diejenigen in je eine Ambe zusammen, welche sich nur durch die Stellung der Elemente voneinander unterscheiden ($a_3\ a_4$ und $a_4\ a_3$). Da aber zwei Elemente $1\cdot 2$ mal sich permutieren lassen, so fallen stets $1\cdot 2$ Amben mit Versetzung und ohne Wiederholung in eine zusammen, mithin ist die Anzahl der Amben ohne Versetzung und ohne Wiederholung $1\cdot 2$ mal so klein als die der entsprechenden Variationen, daher ${}^{2}_{0}C_{n} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$.

2. Von den Ternen der n Elemente mit Versetzung und ohne Wiederholung fallen, wenn die Versetzung ausgeschlossen wird, diejenigen in je eine Terne zusammen, welche sich nur durch die Stellung der Elemente voneinander unterscheiden ($a_2\ a_3\ a_4$, $a_2\ a_4\ a_3$, $a_3\ a_4\ a_2$, $a_3\ a_2\ a_4$, $a_4\ a_2\ a_3$, $a_4\ a_3\ a_2$). Da aber drei Elemente sich $1\cdot 2\cdot 3$ mal permutieren lassen, so fallen stets $1\cdot 2\cdot 3$ Ternen mit Versetzung und ohne Wiederholung in eine zusammen, folglich ist die Anzahl der Ternen ohne Versetzung und ohne Wiederholung $1\cdot 2\cdot 3$ mal so klein als die der entsprechenden Variationen, mithin ${}^{3}_{0}C_{n} = \frac{n(n-1)(n-2}{1\cdot 2\cdot 3}$.

3. Von den Variationen der k^{ten} Klasse der n Elemente ohne Wiederholung fallen, wenn Versetzung ausgeschlossen wird, diejenigen in eine zusammen, welche sich nur durch die Stellung der Elemente voneinander unterscheiden. Da aber k Elemente (k!) mal sich permutieren lassen, so muß die Anzahl der Kombinationen der k^{ten} Klasse ohne Versetzung und ohne Wiederholung (k!) mal so klein sein als die der entsprechenden Variationen, daher ist

$${}^{k}_{0}C_{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k}. \quad \text{(Vgl. (133).)}$$

Aufgabe. Zu bilden die Amben, Ternen, Quaternen der 5 Elemente a, b, c, d, e ohne Versetzung und ohne Wiederholung.

Digitized by Google

1. Amben: ab, ac, ad, ae,
bc, bd, be,
cd, ce,
de.

2. Ternen: abc, abd, abe,
acd, ace,
ade,
bcd, bce,
bde,
cde.

3. Quaternen: abcd, abce,
abde,
acde,
bcde.

Anmerkung. Bei Kombinationen ohne Versetzung (Auslesen) folgen die Elemente einander stets in aufsteigender Ordnung, so daß nie ein höheres vor einem niederen (vgl. § 104) steht. Kombinationen sind deshalb „wohlgeordnete Zusammenstellungen".

§ 110.*

Lehrsatz. $${}^{k}_{m}C_{n} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\cdots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}. \qquad (130)$$

Die Anzahl der Kombinationen der k^{ten} Klasse von n Elementen ist gleich der Anzahl der Kombinationen der k^{ten} Klasse von $n+k-1$ Elementen. Der Beweis wird durch Hinzufügung von $k-1$ neuen Elementen geführt, die dann den alten gleich gesetzt werden.

Aufgabe. Die Amben und Ternen der Elemente a, b, c, d ohne Versetzung und mit Wiederholung zu bilden.

Amben:

aa,	ab,	ac,	ad,
	bb,	bc,	bd,
		cc,	cd,
			dd.

Ternen:

aaa,	aab,	aac,	aad,
	abb,	abc,	abd,
		acc,	acd,
			add,
bbb,	bbc,	bbd,	
	bcc,	bcd,	
			bdd,
		ccc,	ccd,
			cdd,
			ddd.

3. Kapitel. Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 111.

Erklärung. Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses versteht man den Bruch, dessen Zähler die Anzahl der dem Eintreffen günstigen Fälle, und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle angibt.

Digitized by Google

Bezeichnet g die Anzahl der günstigen Fälle, m die der möglichen Fälle, so ist:

$$w = \frac{g}{m}. \tag{131}$$

Ist $\frac{g}{m} = 1$, so ist das Ereignis gewiß.

Ist $\frac{g}{m} = 0$, so ist das Ereignis unmöglich.

Ist $\frac{g}{m} = \frac{1}{2}$, so ist das Ereignis ungewiß.

Ist $\frac{g}{m} > \frac{1}{2}$, so ist das Ereignis wahrscheinlich.

Ist $\frac{g}{m} < \frac{1}{2}$, so ist das Ereignis unwahrscheinlich.

Bezeichnet u die Anzahl der ungünstigen Fälle, so ist $u = m - g$, und es heißt $v = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m}$ die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen?

Auflösung. Jede der 6 Nummern des einen Würfels kann sich mit jeder der 6 Nummern des andern Würfels verbinden, die Anzahl der möglichen Fälle ist daher ${}^{2}_{m}V_6 = 6^2$. Die günstigen Fälle sind 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{6}{3^6} = \frac{1}{6}$.

Beispiel 2. Aus einer Urne, in welcher 90 Nummern liegen, werden 5 herausgezogen; 18 Nummern hat man auf einer Lottokarte besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine Union, Ambe, Terne, Quaterne oder Quinterne zu gewinnen?

Auflösung. Die Anzahl aller möglichen Fälle (1 2 3 4 5, 1 2 3 4 6 usw.) ist gleich ${}^{5}_{0}C_{90}$.

1. Für den Gewinn einer Union entstehen die günstigen Fälle dadurch, daß jede der 18 Nummern sich mit jeder der Quaternen der 72 übrigen Nummern zu einer Quinterne verbindet; ihre Anzahl ist also $18 \cdot {}^{4}_{0}C_{72}$, mithin die Wahrscheinlichkeit, daß eine Union gewonnen wird, gleich ${}^{1}_{0}C_{18}\ {}^{4}_{0}C_{72} : {}^{5}_{0}C_{90}$.

2. Für den Gewinn einer Ambe erhält man die Anzahl der günstigen Fälle dadurch, daß man jede der Amben von 18 Elementen ohne Versetzung und Wiederholung mit jeder der Ternen der übrigen 72 Elemente zu einer Quinterne verbindet; also ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich ${}^{2}_{0}C_{18} \cdot {}^{3}_{0}C_{72}$, mithin die Wahrscheinlichkeit, daß eine Ambe gewonnen wird, gleich

$$({}^{2}_{0}C_{18} \cdot {}^{3}_{0}C_{72}) : {}^{5}_{0}C_{90}.$$

Digitized by Google

Ähnlich findet man die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn einer Terne, Quaterne, Quinterne bzw.:

$$({}^{3}_{0}C_{18} \cdot {}^{2}_{0}C_{72}) : {}^{5}_{0}C_{90}; \quad ({}^{4}_{0}C_{18} \cdot {}^{1}_{0}C_{72}) : {}^{5}_{0}C_{90}; \quad {}^{5}_{0}C_{18} : {}^{5}_{0}C_{90}.$$

§ 112.

Lehrsatz 1. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines unter mehreren voneinander unabhängigen Ereignissen (totale Wahrscheinlichkeit) ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Bezeichnet m die Anzahl aller möglichen Fälle, g_1 die der günstigen Fälle des ersten, g_2 die des zweiten, g_3 die des dritten Ereignisses usw., so ist die Anzahl aller günstigen Fälle $g_1 + g_2 + g_3$, daher die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines dieser Fälle

$$w = \frac{g_1 + g_2 + g_3 \cdots g_n}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \cdots \frac{g_n}{m}$$

$$\boldsymbol{w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}.$$

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 5, 6 oder 7 zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 5 zu werfen (vgl. § 111, B. 1), ist $\frac{4}{36}$, die Wahrscheinlichkeit, 6 oder 7 zu werfen, $\frac{5}{36}$ bzw. $\frac{6}{36}$, daher die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines dieser Ereignisse

$$\tfrac{4}{36} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{6}{36} = \tfrac{15}{36} = \tfrac{5}{12}.$$

Lehrsatz 2. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitig oder in gegebener Folge nacheinander stattfindende Eintreten mehrerer voneinander unabhängigen Ereignisse (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit) ist gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Bezeichnet man mit $m_1, m_2 \cdots m_n$ bezüglich die Anzahl der möglichen Fälle für das Eintreten des 1ten, 2ten, $\cdots n^{ten}$ Ereignisses, so ist, da jeder der gleichmöglichen Fälle eines Ereignisses mit jedem Falle jedes der anderen Ereignisse zusammentreffen kann, die Anzahl aller möglichen Fälle $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$. Bezeichnet man ferner mit $g_1, g_2, \cdots g_n$ bezüglich die Anzahl der günstigen Fälle für das Eintreten der einzelnen Ereignisse, so ist, da jeder günstige Fall eines Ereignisses mit jedem günstigen Falle jedes anderen Ereignisses zusammentreffen kann, die Anzahl aller günstigen Fälle gleich $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdots g_n$, folglich

$$\boldsymbol{w_z} = \frac{g_1 g_2 g_3 \cdots g_n}{m_1 m_2 m_3 \cdots m_n} = \frac{\boldsymbol{g_1}}{\boldsymbol{m_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{g_2}}{\boldsymbol{m_2}} \cdot \frac{\boldsymbol{g_3}}{\boldsymbol{m_3}} \cdots \frac{\boldsymbol{g_n}}{\boldsymbol{m_n}} = \boldsymbol{w_1 \cdot w_2 \cdots w_n}. \quad (132)$$

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Geldstücke dreimal nacheinander Bild zu werfen?

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, Bild zu treffen, ist bei jedem Wurfe $\frac{1}{2}$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Digitized by Google

Lehrsatz 3. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei Ereignissen wenigstens eins eintritt (eingeschränkte Wahrscheinlichkeit), ist, wenn die einzelnen Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3, $\cdots$ sind,

$$w = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3)\cdots$$

Beweis. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Wahrscheinlichkeit, daß keins der Ereignisse eintritt, entgegengesetzt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das 1te, 2te, 3te .. Ereignis nicht eintritt, ist bzw. gleich $1 - w_1$, $1 - w_2$, $1 - w_3$ .., die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keins von allen eintritt, nach Lehrsatz 2: $(1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3)\cdots$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3)\cdots$$

Beispiel 3. Die Wahrscheinlichkeit, daß nach einer gewissen Zeit A und B leben, sei $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{2}{5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach dieser Zeit wenigstens einer noch lebt?

Auflösung. Nach L. 3 ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = 1 - \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{11}{20}.$$

---

4. Kapitel. Von der geteilten fallenden Faktoriellen und dem binomischen Lehrsatze.

§ 113.

Einleitung. Durch Multiplikation der Binome erhält man

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab.$$
$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + ac + bc) + abc$$
$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + x^3(a + b + c + d) + x^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + x(abc + abd + acd + bcd) + abcd.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt ein nach fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom dar. Der Koeffizient von x^4 ist 1, die Koeffizienten der folgenden Potenzen von x sind Summen von Größen, welche, wenn man von den Rechnungszeichen absieht, bezüglich als die Unionen, Amben, Ternen, Quaternen der Elemente a, b, c, d ohne Versetzung und ohne Wiederholung betrachtet werden können. Setzt man $a = b = c = d = 1$, so stellt die Anzahl der Unionen, Amben, Ternen, Quaternen zugleich die Summe der die Koeffizienten zusammensetzenden Glieder, also die Größe der Koeffizienten dar, und es ist daher nach (129)

$$(x + 1)^4 = x^4 + \frac{4}{1}x^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Man schließt daraus, daß allgemein

$$(x + 1)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3} + \cdots + \frac{n!}{n!}x^0 \text{ ist.}$$

Digitized by Google

Die Koeffizienten der Potenzen von x heißen **Binomialkoeffizienten.** Man bezeichnet $\frac{n}{1}$ mit n_1 oder $\binom{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ mit n_2 oder $\binom{n}{2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ mit n_3 oder $\binom{n}{3}$, setzt also

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k} = n_k, \qquad (133)$$

liest „n über k" oder „n tief k" und nennt diesen Bruch den k^{ten} Binomialkoeffizienten oder die k^{te} geteilte (fallende) Faktorielle der Zahl n, k ihren Zeiger. Dem entsprechend setzt man $\binom{n}{0} = 1$.

Erklärung. Unter der k^{ten} geteilten (fallenden) Faktoriellen von $n\left(n_k \text{ oder } \binom{n}{k}\right)$ versteht man einen Bruch, dessen Nenner das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis k, und dessen Zähler ein Produkt aus k Faktoren ist, die man erhält, wenn man von n der Reihe nach alle Zahlen von 0 bis (k − 1) abzieht.

Folgerung 1. Es ist $\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}$.

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\,..\,k},$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-k)}.$$

Folgerung 2. Die k^{te} geteilte Faktorielle von n wird gleich 1, wenn der Zeiger k gleich der Zahl n ist; sie wird gleich 0, wenn der Zeiger größer als die Zahl ist, vorausgesetzt, daß n eine ganze positive Zahl ist.

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+k} = 0.$$

§ 114.

Lehrsatz 1. Die k^{te} geteilte Faktorielle von n ist gleich der $(n-k)^{ten}$ geteilten Faktoriellen derselben Zahl.

Behauptung. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (134)

Beweis. Es ist nach der Erklärung:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot(n-k+1)}{k!}, \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot(k+2)(k+1)}{(n-k)!}$$

Digitized by Google

oder, wenn man den ersten Bruch mit dem Nenner des zweiten, den zweiten Bruch mit dem Nenner des ersten erweitert,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{k!\cdot(n-k)!},$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(k+2)\,(k+1)\,k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Da die beiden Zähler der rechten Seiten das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n bilden, also die rechten Seiten beider Gleichungen einander gleich sind, so müssen auch ihre linken Seiten einander gleich sein.

Folgerung. Da der 0te Binomialkoeffizient gleich dem n^{ten}, der 1te gleich dem $(n-1)^{ten}$, der 2te gleich dem $(n-2)^{ten}$ usw. ist, so folgt aus der Richtigkeit des Ausdrucks von $(x+1)^n$ durch Umkehrung der Reihenfolge der Glieder die Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + x^n.$$

Lehrsatz 2. Die k^{te} geteilte Faktorielle einer Zahl ist gleich der Summe der k^{ten} und $(k-1)^{ten}$ geteilten Faktoriellen der um 1 verminderten Zahl.

Behauptung. $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \qquad (135)$$

Beweis. Aus der Erklärung von $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$ folgt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)\,(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} +$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\left[\frac{n-k+1}{k}+1\right] =$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)\,(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} =$$

$\binom{n+1}{k}$ nach § 113, F. 1.

Lehrsatz 3. Die $(k+1)^{te}$ geteilte Faktorielle von $(n+1)$ ist gleich der Summe der k^{ten} geteilten Faktoriellen der Zahlen k, $(k+1)$, .. bis n.

Behauptung.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}. \qquad (136)$$

Digitized by Google

Beweis. Nach L. 2 ist:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k},$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k+1} + \binom{k}{k}.$$

Addiert man die Gleichungen, hebt die gleichen Glieder auf beiden Seiten und beachtet, daß $\binom{k}{k+1} = 0$ ist, so ergibt sich:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} \cdots + \binom{k}{k}.$$

Folgerungen. 1. Setzt man in (136) für k der Reihe nach 2, 3, 4 · ·, so erhält man:

$$\sum_1^n \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{(n-1)n}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

$$\sum_1^n \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ usw.}$$

2. $\sum_1^n \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\sum_1^n n^2 - \frac{1}{2}\sum_1^n n = \frac{1}{2}\sum_1^n n^2 - \frac{(n+1)n}{4}$, folglich

$$\sum_1^n n^2 = \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1\cdot 3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

3. Arithmetische Reihen höherer Ordnung:

Reihe	a	a + b	a + 2b + c	a + 3b + 3c + d
1. Differenzenreihe	b	b + c	b + 2c + d	
2. Differenzenreihe	c	c + d		
3. Differenzenreihe	d			

. . . . . .

allgemeines Glied $G_n = a + \binom{n-1}{1} b + \binom{n-1}{2} c + \binom{n-1}{3} d + \cdots$

Summe $S_n = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c + \binom{n}{4} d + \cdots$ **(137)**

Digitized by Google

Beispiel. Die Kubikzahlen bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung, in welcher $a = 1$, $b = 7$, $c = 12$, $d = 6$, $e = 0$ ist. Man erhält

$$\sum_1^n n^3 = \binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}$$

oder durch Umformung $\binom{n+1}{2}^2$.

Lehrsatz 4. Aus einer geteilten Faktoriellen erhält man die Faktorielle, deren Zahl und Index um eine Einheit kleiner sind, indem man jene mit ihrem Index multipliziert und das Produkt durch die Zahl dividiert.

Behauptung.

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n}, \quad \binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} \cdot \frac{n}{k-1}.$$

Beweis.

$$\binom{n-1}{k} \cdot \frac{n}{k+1} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{n}{k+1}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k+1)} = \binom{n}{k+1}.$$

§ 115.

Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Die n^{te} Potenz des Binoms $(1+x)$ ist gleich der Summe von $(n+1)$ Gliedern, deren Hauptfaktoren die steigenden Potenzen von x^0 bis x^n, und deren Koeffizienten die 0te, 1te, $2^{te} \cdots n^{te}$ geteilten Faktoriellen von n sind.

Behauptung.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + x^n. \qquad (138)$$

Beweis. Angenommen, der Satz sei richtig für den Exponenten s, es sei

$$(1+x)^s = 1 + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + \cdots \binom{s}{k-1}x^{k-1} + \binom{s}{k}x^k + \cdots + x^s.$$

Durch Multiplikation mit $(1+x)$ geht die Gleichung über in:

$$(1+x)^{s+1} = 1 + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + \cdots + \binom{s}{k}x^k + \cdots + x^s$$

$$+ 1 \cdot x + \binom{s}{1}x^2 + \cdots + \binom{s}{k-1}x^k + \cdots + \binom{s}{s-1}x^s + x^{s+1}$$

$$= 1 + \left[\binom{s}{1}+1\right]x + \left[\binom{s}{2}+\binom{s}{1}\right]x^2 + \cdots + \left[\binom{s}{k}+\binom{s}{k-1}\right]x^k + \cdots + x^{s+1}.$$

Digitized by Google

Daraus folgt mit Anwendung von (135):

$$(1+x)^{s+1}=1+\binom{s+1}{1}x+\binom{s+1}{2}x^2+\cdots+\binom{s+1}{k}x^k+\cdots+x^{s+1}.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man aber, wenn man in der Gleichung der Annahme $(s+1)$ für s setzt. Wenn der Satz daher für den Exponenten s richtig ist, so muß er auch für den Exponenten $(s+1)$ richtig sein, und da nach § 113 Einleitung die Richtigkeit des Satzes für die Exponenten 2, 3, 4 erhellt, so ist sie auch für jeden ganzen positiven Wert von n bewiesen.

Folgerung. Setzt man in Gl. (138) $x=\frac{b}{a}$, so erhält man:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{b}{a}+\binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2}+\cdots+\binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k}+\cdots\binom{n}{n}\frac{b^n}{a^n}$$

oder, wenn man $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\frac{(a+b)^n}{a^n}$ setzt und mit a^n beide Seiten multipliziert,

$$(a+b)^n$$
$$=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots\cdots b^n. \quad (139)$$

Setzt man in dieser Gleichung $-b$ für b, so ergibt sich:

$$(a-b)^n=a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\cdots+(-1)^n b^n. \quad (140)$$

Anmerkung. Die Verwendung des Pascalschen Dreiecks (§ 47) läßt sich durch ein dem obigen Beweis entsprechendes Verfahren rechtfertigen:

$(a+b)^0$	hat den Koeffizienten					1				
$(a+b)^1$	„ die „				1		1			
$(a+b)^2$	„ „ „			1		2		1		
$(a+b)^3$	„ „ „		1		3		3		1	
$(a+b)^4$	„ „ „	1		4		6		4		1
$(a+b)^5$	„ „ „	1	5		10		10		5	1

denn es ist

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=(a+b)^4\cdot(a+b)\\&=(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b)\\&=\begin{array}{l}a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4\\\quad+1a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5\end{array}\\&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{aligned}$$

Digitized by Google

Anhang zur Arithmetik und Algebra

für

Oberrealschulen und Realgymnasien

sowie für

Gymnasien mit mathematischem Reformunterricht

Inhaltsübersicht.

VIII. Abschnitt. **Versicherungsrechnung.**

Seite

1. Kapitel. Sterblichkeitstafeln (§ 116 bis § 118) 162
2. Kapitel. Erlebensversicherungen (§ 119) 165
3. Kapitel. Todesfallversicherungen (§ 120) 169
4. Kapitel. Prämienreserve (§ 121) 171

IX. Abschnitt. **Analysis.**

1. Kapitel. Funktion und Argument (§ 122 und § 123) 173
2. Kapitel. Gleichungen 1. und 2. Grades (§ 124 bis § 126) 179
3. Kapitel. Gleichungen 3. und höheren Grades (§ 127 bis § 131) . . . 185

X. Abschnitt. **Differentialrechnung.**

1. Kapitel. Differentialquotienten (§ 132 bis § 135) 198
2. Kapitel. Reihen (§ 136 bis § 142) 212
3. Kapitel. Maxima und Minima (§ 143 und § 144) 230

Schluß. Formelsammlung 237

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Versicherungsrechnung.

§ 116.

Gesetz der großen Zahlen.

1. Die Versicherungsrechnung hat ihre mathematische Begründung in dem von Cardano 1545 zuerst ausgesprochenen, von Jakob Bernoulli 1680 begründeten und von Poisson 1811 benannten Gesetz der großen Zahlen: Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Reihe von beobachteten Ereignissen sich auch weiter nach gleichem Zahlenverhältnis wiederholen wird, wächst mit der Anzahl der beobachteten Fälle und mit der Anzahl der ins Auge gefaßten zukünftigen Fälle. Wenn festgestellt ist, daß von einer Million Menschen die Hälfte das 50. Lebensjahr erreicht haben, so darf man annehmen, daß von einer unter annähernd gleichen Verhältnissen geborenen Million Kinder die Hälfte das 50. Lebensjahr erreichen werden. Dagegen ist es unzulässig, diesen Schluß anzuwenden, wenn nur 100 Menschen oder gar nur 10 in Betracht gezogen werden. Wenn in 50 Jahren von 100000 einzelliegenden versicherten Gehöften in Deutschland 5000 durch Feuer zerstört worden sind, so darf man annehmen, daß von derselben Zahl von Gehöften in den nächsten 10 Jahren nicht mehr als 1000 niederbrennen werden. Der Schluß wird aber unsicher, wenn die Beobachtung nur ein Jahr lang bei 1000 Gehöften angestellt ist und danach angenommen wird, daß von 1000 Gehöften im kommenden Jahr nur eins niederbrennen wird.

2. Versteht man unter Versicherungsprämie die Summe, welche jährlich gezahlt wird, damit im Fall eines Schadens der Wert des zerstörten Gegenstandes ersetzt wird, so kann die Versicherungsprämie für ein Gehöft nur unter der Bedingung $^1/_{1000}$ seines Wertes betragen, daß viele Tausende von Hofbesitzern sich zu einer Gesellschaft auf Gegenseitigkeit vereinigen, in eine gemeinsame Kasse jährlich $^1/_{1000}$ des Wertes ihrer Gehöfte einzahlen und aus dieser Kasse den durch Feuer dem einzelnen entstandenen Verlust ersetzen. Wohl kann eine Aktiengesellschaft, d. h. eine Vereinigung von Kapitalisten, die um eines Gewinnes willen übertragbare Anteilscheine bezahlt und dadurch ein Stammkapital für ein Unternehmen zusammengebracht haben, eine einzelne Versicherung übernehmen, da sie aus ihrem Kapital einen Schaden ersetzen kann; aber nur die Menge der Versicherungen und die Wiederholung derselben in vielen aufeinanderfolgenden Jahren wird eine Sicherheit dafür bieten, daß die Ausgaben die Einnahmen nicht übersteigen.

3. Für die Aktiengesellschaften sind also dieselben Grundsätze maßgebend wie für die Gegenseitigkeitsgesellschaften, wenn es sich um Berechnung der Nettoprämie handelt, d. h. der Summe, die jährlich gezahlt werden muß,

Digitized by Google

um die entstandenen Schäden zu decken. Beide Arten von Gesellschaften müssen aus den Prämien ihre Verwaltungskosten decken, die Aktiengesellschaft will außerdem einen Gewinn für ihre Teilnehmer erzielen. Hierdurch erhöht sich die Prämie um einen gewissen Betrag, der bei der Aktiengesellschaft nicht unbedingt größer zu sein braucht, und die danach jährlich von dem Versicherungsnehmer zu zahlende Summe wird Bruttoprämie genannt. Im folgenden wird nur die Ermittelung der Nettoprämie gezeigt werden, und außerdem soll eine Beschränkung auf Lebensversicherungen eintreten.

4. Lebensversicherung im weitesten Sinn ist ein reines Geldgeschäft, bei welchem die Lebensdauer der versicherten Person vertragsmäßig die entscheidende Rolle spielt. Aus der Menge derartiger Versicherungen sollen hier nur die einfachen Erlebens- und die einfachen Todesfallversicherungen behandelt werden, bei denen, wie der Name sagt, die Verpflichtung zur Zahlung seitens der Versicherungsgesellschaft eintritt, je nachdem der einzelne Versicherungsnehmer einen bestimmten Zeitpunkt erlebt oder nicht erlebt. Die Zahlung des Versicherungsnehmers kann entweder eine einmalige oder eine wiederholte sein, im ersteren Fall wird sie Mise, im letzteren Prämie genannt. Ebenso kann die Zahlung der Gesellschaft eine einmalige oder eine wiederholte sein, wonach man Kapital- und Rentenversicherung unterscheidet. Prämien und Renten werden in der Regel jährlich gezahlt, und zwar entweder lebenslänglich oder für eine bestimmte Zeit (temporär). Eine Rentenzahlung kann außerdem entweder sofort oder später beginnen, im letzteren Falle wird sie als aufgeschoben bezeichnet.

§ 117.

Sterblichkeitstafel.

1. Für die Berechnung der Prämien, Leibrenten usw. sind die Sterblichkeitstafeln maßgebend. Diese enthalten das Erfahrungsmaterial darüber, wie viele von einer bestimmten, nicht zu kleinen Zahl Geborner das 1., 2. usw. bis 100. Jahr erlebt haben. Hierzu ist nicht nötig, die Beobachtung wirklich auf 100 Jahre auszudehnen, wenn es auch für bestimmte Gruppen von Menschen geschehen ist, da bereits 1693 von Haller die ersten Sterblichkeitstafeln aufgestellt und seit dem andauernd von den Versicherungsmathematikern ergänzt und verbessert worden sind.

2. Vielmehr liefert schon eine genaue Volkszählung und die Totenliste des darauf folgenden Jahres ein brauchbares Bild der Absterbeordnung, sobald das Lebensalter in beiden Fällen angegeben ist. Bezeichnet man (nach M. Cantor, Politische Arithmetik) die Gesamtheit der n Jahre alten Personen bei einer Volkszählung mit λ_n, die im n^{ten} Lebensjahre gestorbenen in der Totenliste mit τ_n, die Gesamtheit der Lebenden mit A, die der Gestorbenen mit T, so ist

$$A = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{100}$$
$$T = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{100}.$$

Von λ_0 Neugeborenen haben dann $\lambda_0 - \tau_0$ das erste Lebensjahr erreicht, von λ_1 Einjährigen $\lambda_1 - \tau_1$ das 2. Lebensjahr usw. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nimmt man an, daß wenn von λ_n n jährigen τ_n gestorben

Digitized by Google

sind, von 10000 njährigen im Laufe des nächsten Jahres $10000 \cdot \tau_n : \lambda_n$ sterben werden.

3. Die auf diese Weise ermittelten Zahlen befinden sich unter Berücksichtigung der einschlägigen Verhältnisse in hinreichend guter Übereinstimmung mit den direkt besonders von Versicherungsgesellschaften und Rentenanstalten gewonnenen Resultaten. Man hat für die Absterbeordnung auch aus theoretischen Erwägungen Formeln aufgestellt, deren vollkommenste die von Lazarus und Laudi gegebene ist, wonach die von einer Million Neugeborener im x^{ten} Jahre noch Lebenden $L_{(x)}$

$$L_{(x)} = A \cdot b^{c^x} \cdot a^x \cdot H^{k^x}$$

sind. Aber die hier auftretenden Konstanten $A = 7{,}751$; $b = 0{,}9992$; $c = 1{,}0988$; $a = 0{,}993$; $H = 1{,}291$; $k = 0{,}4$ sind doch wieder dem empirischen Zahlenmaterial entnommen.

4. Die nach dieser Formel ausgeglichene Tafel der Assicurazioni Generali in Triest ist mit Erlaubnis der Gesellschaft im Anhang mitgeteilt und wird den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt. Nur ist die Tafel, die im Original von 1000000 Neugeborenen ausgeht, auf 10000 als Ausgangszahl beschränkt. Als Zinsfuß ist $4\,\%$ angenommen.

§ 118.

Summe der diskontierten Lebenszahlen.

1. Fundamentalaufgabe. Welche Summe s_0 ist erforderlich, um l_0 Neugeborenen bis zu ihrem Lebensende eine jährliche Rente von je je einer Mark auszahlen zu können?

Lösung. Im n^{ten} Jahre sind von den l_0 noch l_n am Leben; diese erhalten l_n ℳ. Das bei ihrer Geburt hierzu erforderliche Kapital werde mit d_n bezeichnet, so ist

$$d_n \cdot q^n = l_n,$$

wobei $q = 1{,}04$ ist, da der angenommene Zinsfuß $4\,\%$ beträgt. Für die Zahl

$$d_n = \frac{l_n}{q^n}$$

ist der Ausdruck „diskontierte Lebenszahl" neben einigen noch anfechtbareren in Gebrauch. Für jede der Zahlen l_0 bis l_{100} bildet man das zugehörige d_n und hat damit die Summe, welche im n^{ten} Jahre durch Zinseszins so weit angewachsen ist, um jedem der l_n Lebenden je eine Mark auszuzahlen. Da für $l_0 = 10000$ die Zahl $l_{100} = 0$ und demnach auch $d_{100} = 0$ ist, genügt es bis zum 100. Lebensjahre zu gehen, und man erhält die erforderliche Gesamtsumme durch Addition von rückwärts:

$$d_{100} + d_{99} + d_{98} + \cdots + d_2 + d_1 + d_0 = s_0.$$

2. Man bildet aber auch alle Teilsummen

$$d_{100} + d_{99} + d_{98} + \cdots + d_{n+2} + d_{n+1} + d_n = s_n$$

und nennt s_n die Summe der diskontierten Lebenszahlen.

Digitized by Google

Nur diese s_n sind in der Tabelle aufgeführt, da die d_n sich hieraus leicht ableiten lassen. Es ist

$$d_{100} + d_{99} + \cdots + d_{n+2} + d_{n+1} + d_n = s_n$$
$$d_{100} + d_{99} + \cdots + d_{n+2} + d_{n+1} = s_{n+1},$$

folglich $d_n = s_n - s_{n+1}$, also z. B. $d_{20} = s_{20} - s_{21}$.

3. Mit Hilfe der Tabelle der l_n und der s_n läßt sich nun jede Aufgabe der einfachen Lebensversicherung lösen. Aus der obigen Teilung in Erlebens- und Todesfall-, weiter in Kapital- und Rentenversicherung, unter Einzahlung einer Mise oder jährlichen Prämie und unter Berücksichtigung, ob die Zahlungen lebenslänglich oder temporär, sofort oder nach einem Aufschub geleistet werden, ergeben sich eine große Anzahl verschiedener Aufgaben, von denen aber nur zwölf Typen praktischen Wert haben. Einige Beispiele werden aber genügen.

§ 119.

Erlebensversicherungen.

1. Erlebens-Kapitalversicherung durch eine Mise.

Aufgabe. Durch eine einmalige Zahlung m soll einem einjährigen Kinde die Auszahlung einer Summe c im 20. Lebensjahre zugesichert werden. In welchem Verhältnis stehen m und c?

Lösung. Nach dem Gesetz der großen Zahlen kann eine Gesellschaft auf Gegenseitigkeit eine Verpflichtung nur eingehen, wenn gleichzeitig eine hinreichende Zahl von Versicherungen abgeschlossen wird. Als eine solche hinreichende Zahl sieht man die in der Sterblichkeitstabelle für jedes Lebensalter angeführte Zahl der von 10000 Neugeborenen in dem Alter noch Lebenden an. Das erste Lebensjahr vollenden nach der Tafel $l_1 = 8517$ Kinder. Für jedes derselben wäre die Summe m zu zahlen. Bis zur Auszahlung im 20. Lebensjahre vermehrt sich diese Summe durch Zinseszinsen, wenn man 4 Prozent rechnet, auf $8517 \cdot m \cdot 1{,}04^{19}$ ℳ. In diesem Jahre ist nun an jeden der von den 8517 im 20. Jahre noch Lebenden, das sind nach der Tabelle 6698, je c ℳ zu zahlen. Es ergibt sich daraus die Gleichung

$$8517 \cdot 1{,}04^{19} \cdot m = 6698 \cdot c,$$

und demnach ist $m = 0{,}373\ c$, d. h. wenn ein Kapital von 1000 ℳ versichert wird, so ist in diesem Fall eine Mise von 373 ℳ einzuzahlen. Man führt aber diese Aufgabe, wie alle folgenden, auf die Fundamentalaufgabe durch Division durch eine geeignete Potenz des Zinsfaktors zurück. Statt der Zahlen sollen die Bezeichnungen l_1, l_{20} und statt 1,04 der Buchstabe q gewählt werden, so ist

$$l_1 \cdot q^{19} \cdot m = l_{20} \cdot c.$$

Dividiert man durch q^{20}, so erhält man

$$\frac{l_1}{q^1} \cdot m = \frac{l_{20}}{q^{20}} \cdot c.$$

Digitized by Google

Nach der Definition der s ist nun

$$s_1 = \frac{l_{100}}{q^{100}} + \cdots + \frac{l_2}{q^2} + \frac{l_1}{q^1}$$

$$s_2 = \frac{l_{100}}{q^{100}} + \cdots + \frac{l_2}{q^2},$$

folglich $s_1 - s_2 = \frac{l_1}{q^1}$ und ebenso $s_{20} - s_{21} = \frac{l_{20}}{q^{20}}$, und die Gleichung lautet:

$$(s_1 - s_2)\,m = (s_{20} - s_{21}) \cdot c.$$

Aus der dritten Staffel der Tabelle entnimmt man

$s_1 = 156193$	$s_{20} = 59386$
$s_2 = 148003$	$s_{21} = 56330$
$s_1 - s_2 = 8190$	$s_{20} - s_{21} = 3056$

$$8190\,m = 3056\,c$$

$$m = 0{,}373\,c.$$

Wird die Mise im v^{ten} Lebensjahr eingezahlt, und das Kapital im w^{ten} Lebensjahr ausgezahlt, so lautet die Gleichung

$$(s_v - s_{v+1})\,m = (s_w - s_{w+1})\,c.$$

2. Erlebens-Kapitalversicherung durch dauernde Prämienzahlung.

Aufgabe. Einem einjährigen Kinde soll durch jährliche Prämienzahlung p eine für den Erlebensfall im 20. Lebensjahr zahlbare Summe c gesichert werden. (Militärversicherung.)

Lösung. Es wird angenommen, daß die Versicherung wiederum gleichzeitig für l_1 Kinder abgeschlossen wird. Für diese werden $l_1 \cdot p$ ℳ im ersten Jahre gezahlt. Im folgenden Jahre leben nur noch l_2 Kinder, für welche also $l_2 \cdot p$ ℳ gezahlt werden und so fort bis zum 19. Jahre. Unter Berücksichtigung der Vermehrung durch Zinseszinsen erhält man bis zum 20. Lebensjahre die Summe

$$l_1 \cdot p \cdot q^{19} + l_2 \cdot p \cdot q^{18} + \cdots + l_{18} \cdot p \cdot q^2 + l_{19} \cdot p \cdot q;$$

diese muß der Auszahlungssumme $l_{20} \cdot c$ gleich sein. Durch Division mit q^{20} und Herausheben des Faktors p erhält man

$$p\left(\frac{l_1}{q^1} + \frac{l_2}{q^2} + \cdots + \frac{l_{18}}{q^{18}} + \frac{l_{19}}{q^{19}}\right) = c \cdot \frac{l_{20}}{q^{20}};$$

da nun $s_1 = \frac{l_{100}}{q^{100}} + \cdots + \frac{l_{20}}{q^{20}} + \frac{l_{19}}{q^{19}} + \cdots + \frac{l_1}{q^1}$

$$s_{20} = \frac{l_{100}}{q^{100}} + \cdots + \frac{l_{20}}{q^{20}},$$

ist der Klammerausdruck auf der rechten Seite $s_1 - s_{20}$, und die Gleichung lautet:

$$(s_1 - s_{20})\,p = (s_{20} - s_{21})\,c.$$

Digitized by Google

Aus der Tabelle und durch Subtraktion findet man

$$s_1 = 156193 \qquad s_{20} = 59386$$
$$s_{20} = 59386 \qquad s_{21} = 56330$$
$$s_1 - s_{20} = 96807 \qquad s_{20} - s_{21} = 3056$$

also $96807\,p = 3056\,c$

$$p = 0{,}03157\,c,$$

d. h. für eine Versicherung über 1000 ℳ ist von dem einzelnen Versicherungsnehmer jährlich eine Prämie von 31,57 ℳ zu zahlen.

Wird die Versicherung im v^{ten} Lebensjahre abgeschlossen auf das w^{te}, so besteht die Gleichung

$$(s_v - s_w)\,p = (s_w - s_{w+1})\,c.$$

3. Erlebens-Kapitalversicherung durch abgekürzte Prämienzahlung.

Aufgabe. Wie 2, nur soll die Prämienzahlung im 10. Lebensjahre aufhören.

Lösung. Dem obigen entsprechend erhält man

$$p\,(l_1 \cdot q^{19} + l_2 \cdot q^{18} + \cdots + l_{10} \cdot q^{10}) = c \cdot l_{20}$$

oder nach Division durch q^{20}

$$p\left(\frac{l_1}{q^1} + \frac{l_2}{q^2} + \cdots + \frac{l_{10}}{q^{10}}\right) = c \cdot \frac{l_{20}}{q^{20}}$$

und Einführung der s

$$p\,(s_1 - s_{11})\,p = (s_{20} - s_{21})\,c$$

oder allgemein: wenn die Prämienzahlung nach v Jahren aufhören soll

$$(s_v - s_{v+r})\,p = (s_w - s_{w+1})\,c.$$

4. Versicherung einer lebenslänglichen sofort beginnenden Leibrente durch eine Mise.

Aufgabe. Ein Sechzigjähriger will sich durch Einzahlung eines Kapitals m eine lebenslängliche Rente von r ℳ sichern. Wie hoch ist diese Rente?

Lösung. Da vorausgesetzt wird, daß alle l_{60} Personen gleichzeitig diese Versicherung abschließen, beträgt das eingezahlte Kapital $l_{60} \cdot m$ ℳ. Sinngemäß wird eine Rente erst nach einem Jahre gezahlt, und zwar an die l_{61} Lebenden, was $l_{61} \cdot r$ ℳ erfordert; im folgenden Jahre werden $l_{62} \cdot r$ ℳ gezahlt und so fort, bis kein Überlebender vorhanden ist, was nach der Tabelle im 100. Jahre angenommen wird. Bis zu diesem Zeitpunkt werden alle Zahlungen verzinst, um eine Vergleichung zu ermöglichen. Man hat also

$$l_{60} \cdot m \cdot q^{40} = r\,(l_{61} \cdot q^{39} + l_{62} \cdot q^{38} + \cdots + l_{99} \cdot q + l_{100}).$$

Durch Division mit q^{100} erhält man

$$m \cdot \frac{l_{60}}{q^{60}} = r\left(\frac{l_{61}}{q^{61}} + \frac{l_{62}}{q^{62}} + \cdots + \frac{l_{100}}{q^{100}}\right).$$

Digitized by Google

Diese Gleichung kann auch unmittelbar gewonnen werden, wenn man alle Zahlungen auf das Geburtsjahr diskontiert. Denn für eine Summe x, die in sechzig Jahren zu $m \cdot l_{60}$ anwächst, gilt die Gleichung $x \cdot q^{60} = m \cdot l_{60}$, es ist also $x = m \frac{l_{60}}{q^{60}}$ und ebenso für die folgenden Jahre. Führt man wiederum die s ein, so ist

$$(s_{60} - s_{61})\, m = r \cdot s_{61}$$

oder allgemein für eine im v^{ten} Lebensjahre abgeschlossene Versicherung

$$(s_v - s_{v+1})\, m = r \cdot s_{v+1}.$$

5. Versicherung einer lebenslänglichen aufgeschobenen Leibrente durch eine abgekürzte Prämienzahlung.

Aufgabe. Ein 30jähriger Mann will durch eine jährlich bis zu seinem 45. Lebensjahre zu zahlende Prämie p sich von seinem 65. Lebensjahr eine Leibrente r sichern.

Lösung. Alle l_{30} zahlen im ersten Jahre $l_{30} \cdot p$ ℳ, im folgenden Jahre gehen $l_{31} \cdot p$ ℳ ein und so fort bis zum 45. Lebensjahre, wo $l_{45}\, p$ ℳ gezahlt werden. Die Auszahlungen beginnen mit dem 65. Lebensjahre an die l_{65} noch Überlebenden, was eine Aufwendung von $l_{65} \cdot r$ ℳ verlangt, im folgenden Jahre sind $l_{66} \cdot r$ ℳ zu zahlen und so fort bis zum 100. Jahre. Alle Zahlungen müssen, um vergleichbar zu sein, bis zu demselben Zeitpunkt verzinst oder auf einen früheren Zeitpunkt diskontiert werden. Diskontiert man auf das Geburtsjahr, so erhält man die Gleichung

$$p\left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \cdots + \frac{l_{45}}{q^{45}}\right) = r\left(\frac{l_{65}}{q^{65}} + \frac{l_{66}}{q^{66}} + \cdots + \frac{l_{100}}{q^{100}}\right)$$

und führt die s ein, so ist

$$(s_{30} - s_{46})\, p = r \cdot s_{65}.$$

6. Allgemeine Grundsätze für Berechnung von Erlebensversicherungen.

Nach Muster der Aufgaben 1 bis 5 lassen sich alle einfachen Erlebensversicherungen berechnen. Z. B. eine Studienversicherung über 1000 ℳ jährlich vom 18. bis 21. Lebensjahre durch eine Mise im 10. Lebensjahre würde uns die Formel ergeben:

$$x \cdot \frac{l_{10}}{q^{10}} = 1000\left(\frac{l_{18}}{q^{18}} + \frac{l_{19}}{q^{19}} + \frac{l_{20}}{q^{20}} + \frac{l_{21}}{q^{21}}\right)$$

oder $$(s_{10} - s_{11})\, x = (s_{18} - s_{22})\, 1000.$$

Für die Berechnung sind zwei Grundsätze maßgebend. 1. Alle l_n der Tabelle beteiligen sich im n^{ten} Jahre an dem Geschäfte. 2. Alle Zahlungen sind entweder bis zum 100. Jahre zu verzinsen, also mit q^{100-n} zu multiplizieren, oder auf das Geburtsjahr der l_n zu diskontieren und durch q^n zu dividieren.

Digitized by Google

§ 120.

Todesfallversicherungen.

1. Todesfallversicherung durch eine Mise.

Aufgabe. Ein 30jähriger Mann will seinen Erben eine Summe von 10000 ℳ im Falle seines Todes durch eine einmalige Zahlung x sichern. Wie hoch muß diese sein?

Lösung. Die Einzahlung würde hier wiederum mit $l_{30} \cdot x$ ℳ angenommen, die bis zum 100. Lebensjahre durch Zinseszinsen auf $l_{30} \cdot x \cdot q^{70}$ ℳ gebracht werden. Die Auszahlungen erfolgen grundsätzlich immer erst am Ende des Rechnungsjahres. Da am Ende des ersten Jahres nur noch l_{31} Versicherte leben, sind im Laufe des Jahres $l_{30} - l_{31}$ Personen gestorben. An die Erben eines jeden derselben sind 10000 ℳ zu zahlen. Diese $(l_{30} - l_{31}) \cdot 10000$ ℳ stehen bis zum 100. Jahre noch 69 Jahre auf Zinseszins, wachsen also zu $10000\ (l_{30} - l_{31})\ q^{69}$ ℳ an. Im nächsten Jahre sterben $l_{31} - l_{32}$, die an ihre Erben zu zahlende Summe wächst auf $10000\ (l_{31} - l_{32}) \cdot q^{68}$ ℳ an usf. bis zum letzten Jahre, wo $l_{99} - l_{100}$ sterben. Man erhält die Gleichung

$$x \cdot l_{30} \cdot q^{70} = 10000\,[(l_{30} - l_{31})\,q^{69} + (l_{31} - l_{32})\,q^{68} + \cdots + (l_{99} - l_{100})].$$

Durch Division mit q^{100} erhält man

$$x \cdot \frac{l_{30}}{q^{30}} = 10000\left[\frac{l_{30}}{q^{31}} - \frac{l_{31}}{q^{31}} + \frac{l_{31}}{q^{32}} - \frac{l_{32}}{q^{32}} + \cdots + \frac{l_{99}}{q^{100}} - \frac{l_{100}}{q^{100}}\right].$$

Während in der Klammer sich die negativen Glieder

$-\frac{l_{31}}{q^{31}} - \frac{l_{32}}{q^{32}} - \cdots - \frac{l_{100}}{q^{100}}$ zu der Summe $-s_{31}$ vereinigen, muß von den positiven Gliedern erst $\frac{1}{q}$ abgespalten werden. Es ist $\frac{l_{30}}{q^{31}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{l_{30}}{q^{30}}$, $\frac{l_{31}}{q^{32}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{l_{31}}{q^{31}}$. Das letzte Glied wäre $\frac{l_{99}}{q^{100}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{l_{99}}{q^{99}}$. Man kann aber, da $l_{100} = 0$ ist, noch ein Ergänzungsglied $\frac{1}{q} \cdot \frac{l_{100}}{q^{100}}$ hier einfügen und hat nun

$$x\frac{l_{30}}{q^{30}} = 10000\left[\frac{1}{q}\left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \cdots + \frac{l_{99}}{q^{99}} + \frac{l_{100}}{q_{100}}\right) - \left(\frac{l_{31}}{q^{31}} + \cdots + \frac{l_{100}}{q^{100}}\right)\right]$$

oder durch Einführung der s

$$\left(s_{30} - s_{31}\right)x = 10000\left(\frac{1}{q}\,s_{30} - s_{31}\right).$$

Es empfiehlt sich nicht, durch s_{30} zu dividieren, wenn auch die Formel eleganter aussieht

$$(1 - u)x = 10000\left(\frac{1}{q} - u\right),$$

Digitized by Google

wo $u = s_{30} : s_{31}$, sondern falls man nicht 7stellige Logarithmen benutzt, $s_{30} : q$ durch gewöhnliche Division zu berechnen.

$$34415 : 1{,}04 = 33091 \qquad s_{30} = 34415$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ \hline 321 \\ 312 \\ \hline 95 \\ 94 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} s_{31} = 32506 \\ \hline 585 \end{array} \qquad \begin{array}{r} s_{31} = 32506 \\ \hline 1909 \end{array}$$

Da $1909\,x = 585 \cdot 1000$, ist $x = 3065$.

Bei Berechnung von u mit 5stelligen Logarithmen erhält man fälschlich $x = 3068$.

2. Abgekürzte Todesfallversicherung durch Prämienzahlung.

Aufgabe. Ein 30jähriger Mann will durch Prämienzahlung eine Versicherung über 10000 ℳ erwerben, die ihm im 65. Lebensjahre, im Fall seines Todes aber sofort seinen Erben ausgezahlt wird.

Lösung. Die Einzahlungen ergeben, wenn sie bis zum 100. Lebensjahre verzinst werden, die Summe

$$x\,(l_{30}\,q^{70} + l_{31}\,q^{69} + \cdots l_{64}\,q^{36}).$$

Die Auszahlungen betragen im ersten Jahre mit Zinseszins bis zum 100. Jahre $10000\,(l_{30} - l_{31})\,q^{69}$, im 65. Lebensjahre werden erstens die Todesfallzahlungen mit $(l_{64} - l_{65}) \cdot q^{35} \cdot 10000$ und die Zahlungen an die l_{65} Überlebenden mit $l_{65} \cdot q^{35} \cdot 10000$ zu leisten sein. Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$x\,(l_{30}\,q^{70} + \cdots + l_{64}\,q^{36}) = 10000\,[(l_{30} - l_{31})\,q^{69} + \cdots + (l_{64} - l_{65})\,q^{35} + l_{65}\,q^{65}].$$

Die Klammer auf der rechten Seite enthält die Glieder

$$l_{30} \cdot q^{69} - l_{31}\,q^{69} + l_{31} \cdot q^{70} - l_{32}\,q^{70} + \cdots + l_{63} \cdot q^{36} - l_{64}\,q^{36} + l_{64}\,q^{35} - l_{65}\,q^{35} + l_{65}\,q^{35}.$$

Da die beiden letzten Glieder fortfallen, erhält man bei Division durch q^{100}

$$\frac{l_{30}}{q \cdot q^{30}} - \frac{l_{31}}{q^{31}} + \frac{l_{31}}{q \cdot q^{31}} - \frac{l_{32}}{q^{32}} + \cdots + \frac{l_{63}}{q \cdot q^{63}} - \frac{l_{64}}{q^{64}} + \frac{l_{64}}{q \cdot q^{64}},$$

das ist aber

$$\frac{1}{q}\left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \cdots + \frac{l_{64}}{q^{64}}\right) - \left(\frac{l_{31}}{q^{31}} + \frac{l_{32}}{q^{32}} + \cdots + \frac{l_{64}}{q^{64}}\right)$$

oder

$$\frac{1}{q}(s_{30} - s_{65}) - (s_{31} - s_{65}).$$

Die Gleichung lautet demnach

$$(s_{30} - s_{65})\,x = 10000\left[\frac{1}{q}(s_{30} - s_{65}) - (s_{31} - s_{65})\right]$$

$$\begin{array}{r} s_{30} = 34415 \\ s_{65} = 2312 \\ \hline 32103 \end{array} \qquad \begin{array}{r} s_{31} = 32506 \\ s_{65} = 2312 \\ \hline 30194 \end{array}$$

Digitized by Google

$$\frac{s_{30} - s_{65}}{q} = 32103 : 1{,}04 = 30867 \quad \Big| \quad s_{31} - s_{65} = 30194$$

312	30194
903	673
832	
69	
62	
7	

$$32103\,x = 673 \cdot 10000$$
$$x = 210$$

Die vereinfachte Formel

$$x = 10000 \left(\frac{1}{q} - \frac{s_{31} - s_{65}}{s_{30} - s_{65}} \right)$$

gibt hier denselben Wert.

3. Bruttoprämie und Nettoprämie.

Bei all diesen Berechnungen darf nicht übersehen werden, daß sie nur die Nettoprämie liefern. Die Bruttoprämien, welche die Versicherungsgesellschaften fordern, sind etwa um 20% höher. Aber von diesen wird in der Regel nach einer gewissen Karenzzeit eine in jedem Jahre steigende Dividende zurückgezahlt, so daß die Beiträge, wenn N die Nettoprämie bedeutet, sich folgendermaßen gestalten können:

1. bis	5. Jahr	$N + 0{,}20\,N$
	6. „	$N + 0{,}18\,N$
	7. „	$N + 0{,}16\,N$
	.....	.....
	14. Jahr	$N + 0{,}02\,N$
	15. „	N
	16. „	$N - 0{,}02\,N$

§ 121.*

Prämienreserve.

Die Prämienreserve für die Gesamtheit der Versicherten ist gleich der Differenz dessen, was die Versicherungsgesellschaft entweder schon empfangen und schon gezahlt oder noch zu zahlen und noch zu empfangen hat, diskontiert auf den gegenwärtigen Zeitpunkt.

Aufgabe. Wie groß ist die Prämienreserve einer auf den Todesfall durch Prämienzahlung von einem 30jährigen abgeschlossenen Versicherung über 10000 ℳ nach 10jähriger Kontraktdauer?

Lösung. Die Prämie selbst ist zu bestimmen aus der Gleichung

$$p \cdot s_{30} = c \cdot \left(\frac{s_{30}}{q} - s_{31} \right).$$

Digitized by Google

In 10 Jahren sind eingezahlt

$$p(s_{30} - s_{40})q^{40},$$

ausgezahlt

$$c\left(\frac{s_{30} - s_{40}}{q} - s_{31} + s_{41}\right)q^{40}.$$

Die Prämienreserve verteilt sich auf die l_{40} Lebenden, beträgt also für die einzelne Versicherung

$$\frac{q^{40}}{l_{40}}\left[p(s_{30} - s_{40}) - c\left(\frac{s_{30} - s_{40}}{q} - s_{31} + s_{41}\right)\right].$$

Bildet man die Differenz der noch zu leistenden Zahlungen, und zwar der Auszahlungen

$$c\left(\frac{s_{40}}{q} - s_{41}\right)q^{40}$$

und der Einzahlungen $p \cdot s_{40} \cdot q^{40}$, so erhält man

$$\frac{q^{40}}{l_{40}}\left[c\left(\frac{s_{40}}{q} - s_{41}\right) - p \cdot s_{40}\right].$$

Eliminiert man p, so erhält man in beiden Fällen denselben Ausdruck. Es ist nämlich $p = c\left(\frac{1}{q} - \frac{s_{31}}{s_{30}}\right)$ und $\frac{q^{40}}{l_{40}} = \frac{1}{s_{40} - s_{41}}$.

Der erste Ausdruck geht dadurch über in

$$\frac{c}{s_{40} - s_{41}}\left(\frac{s_{30} - s_{40}}{q} - s_{31} + \frac{s_{40} \cdot s_{31}}{s_{30}} - \frac{s_{30} - s_{40}}{q} + s_{31} - s_{41}\right)$$

$$= \frac{c}{s_{40} - s_{41}}\left(\frac{s_{40} \cdot s_{31}}{s_{30}} - s_{41}\right)$$

und nach Division jedes Gliedes im Zähler und Nenner durch s_{40}

$$c\left(\frac{s_{31}}{s_{30}} - \frac{s_{41}}{s_{40}}\right) : \left(1 - \frac{s_{41}}{s_{40}}\right).$$

Der zweite Ausdruck liefert dasselbe Resultat

$$\frac{c}{s_{40} - s_{41}}\left[\frac{s_{40}}{q} - s_{41} - \frac{s_{40}}{q} + \frac{s_{40} \cdot s_{31}}{s_{30}}\right]$$

$$= c\left(\frac{s_{31}}{s_{30}} - \frac{s_{41}}{s_{40}}\right) : \left(1 - \frac{s_{41}}{s_{40}}\right).$$

Da $s_{31} : s_{30} = 0{,}94453$ und $s_{40} : s_{41} = 0{,}93775$, beträgt im vorliegenden Fall die Prämienreserve für die einzelne Prämie von 170 ℳ nach 10 Jahren

$$\frac{678 \cdot 10000}{6225}\ ℳ = 1089\ ℳ.$$

Digitized by Google

Neunter Abschnitt.

Analysis.

§ 122.

Funktion und Argument.

Erklärung. *Konstanten* sind Größen, die innerhalb einer Rechnung nur einen bestimmten Zahlenwert haben. Man bezeichnet sie durch Zahlen oder durch die ersten Buchstaben des Alphabets: a, b, c usw., A, B, C···· a_1, a_2, a_3···· A_1, A_2, A_3····

Variabeln sind Größen, die innerhalb einer Rechnung verschiedene Zahlenwerte annehmen können. Man bezeichnet sie durch die letzten Buchstaben des Alphabets: x, y, z, t, u, v, w.

Unabhängige Variabeln sind veränderliche Größen, denen man jeden beliebigen Zahlenwert beilegen kann, *abhängige* solche, die verschiedene Werte annehmen müssen, je nach den Änderungen der mit ihnen durch eine Gleichung verbundenen unabhängigen Variabeln.

Sind y und x durch eine Gleichung verbunden, die außer diesen zwei Variabeln nur Konstanten enthält, so wird die Gleichung bei einem bestimmten Wert von x nur durch einen (oder mehrere) bestimmte Werte von y erfüllt werden. Durch die Forderung, daß die Gleichung immer richtig bleiben soll, wird also y von x abhängig gemacht, und man nennt y eine *Funktion* von x und x das *Argument* von y.

Ist die Gleichung von der Form, daß die eine Seite aus dem Glied y besteht, die andere aber y nicht weiter, sondern nur x enthält, so sagt man: y ist als *explizite* Funktion von x dargestellt. Andernfalls ist y eine *implizite* Funktion.

Die Zahl x bildet man auf einer horizontalen Geraden (X-Achse) ab, indem man von einem Punkte O nach rechts hin im positiven, nach links im negativen Sinne eine Strecke von |x| Längeneinheiten (z. B. |x| cm) abträgt. Die Zahl y bildet man auf einer in O auf der X-Achse senkrechten Geraden (Y-Achse) ab, indem man von O aus nach oben in positivem, nach unten in negativem Sinne eine Strecke von |y| Längeneinheiten (z. B. |y| cm) abträgt, wobei unter |x| und |y| der absolute, d. h. vom Vorzeichen befreite Wert von x und y verstanden wird.

Zieht man durch den Endpunkt eines beliebig angenommenen x und durch den Endpunkt des aus einer Gleichung berechneten dazu gehörigen y Parallelen zu den Achsen, so soll der *Schnittpunkt* dieser Parallelen ein *Bild der Funktion für diesen Wert x* sein. Der Abstand des Punktes von der X-Achse ist dann gleich dem *Wert y der Funktion*. Die Abstände von der X-Achse nennt man *Ordinaten*, die Abstände von der Y-Achse *Abszissen*.

Digitized by Google

Berechnet man zu einer hinreichenden Anzahl von Werten x die durch eine Gleichung zugeordneten Werte y und zeichnet die betreffenden Funktionspunkte, so soll die durch diese Punkte bestimmte Linie ein Bild des Funktionsverlaufs oder kurz ein Bild der Funktion genannt werden.

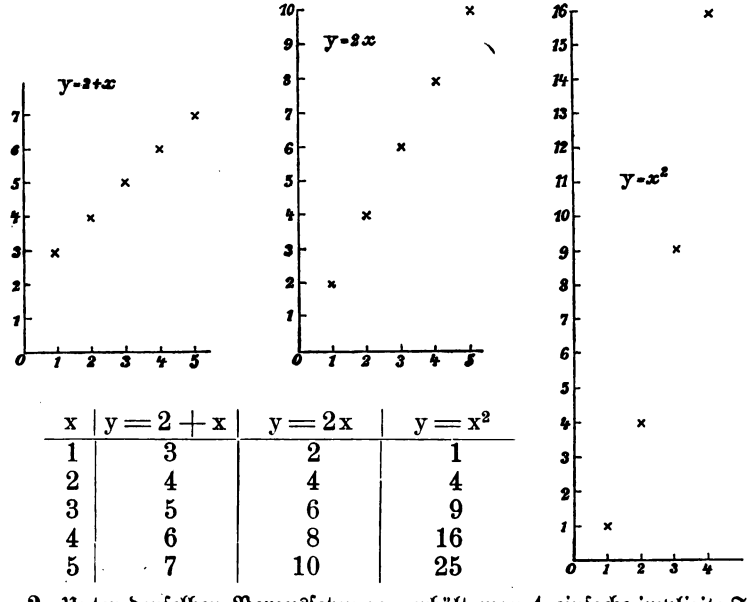
§ 123.

Werte der einfachen Funktionen für natürliche Werte des Arguments. Erweiterung des Zahlbegriffs.

1. Ist a eine natürliche Zahl, d. h. das Ergebnis des Zählens, so kann man durch Addition und Multiplikation drei einfache explizite Funktionen bilden: $y = a + x$, $y = a \cdot x$, $y = x \cdot x \cdot x \cdots (a\,\text{mal}) = x^a$,

z. B. $y = 2 + x$, $y = 2 \cdot x$, $y = x \cdot x = x^2$.

Erteilt man hierin x natürliche Werte, so erhält man auch für y natürliche Zahlen.



x	$y = 2 + x$	$y = 2x$	$y = x^2$
1	3	2	1
2	4	4	4
3	5	6	9
4	6	8	16
5	7	10	25

2. Unter denselben Voraussetzungen erhält man 4 einfache implizite Funktionen $x + y = a$, $x \cdot y = a$, $x = y^a$, $x = a^y$,

wobei $y^a = y \cdot y \cdots (a\,\text{mal})$, $a^y = a \cdot a \cdots (y\,\text{mal})$,

z. B. $x + y = 5$, $x \cdot y = 12$, $x = y^2$, $x = 10^y$.

Um diese explizit auszudrücken, muß man vier neue Operationen einführen: Subtraktion, Division, Radizierung, Logarithmierung:

$$y = a - x, \quad y = a : x, \quad y = \sqrt[a]{x}, \quad y = {}^a\log x,$$

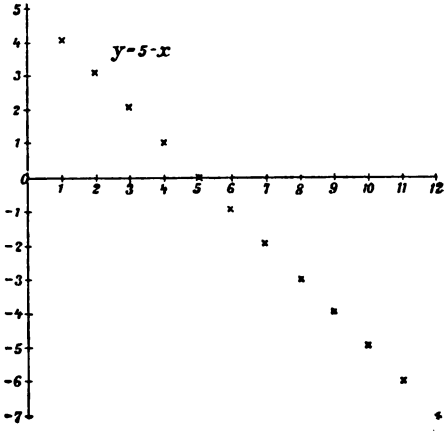
z. B. $y = 5 - x$, $y = 12 : x$, $y = \sqrt[2]{x}$, $y = {}^{10}\log x$.

Digitized by Google

Setzt man in diesen Gleichungen für x natürliche Zahlen, so wird man nur für einige y natürliche Werte finden. Man erweitert nun den Zahlbegriff und nennt alle Werte von y, die man aus diesen vier Gleichungen gewinnt, Zahlen, und zwar wenn a und x natürliche Zahlen sind, sollen die y reelle Zahlen heißen.

3. Setzt man in der Gleichung $y = 5 - x$, für x der Reihe nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw., so ist für $x = 5$: $y = 5 - 5 = 0$. Diese ist die erste künstliche Zahl. Ist $x = 6$, so ist $y = 5 - 6 = 5 - 5 - 1 = 0 - 1 = -1$, indem man die 0 fortläßt. Ebenso ist für $x = 7$

$$y = 5 - 7 = -2.$$

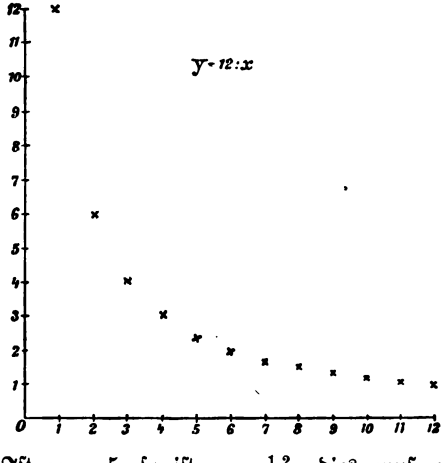


Diese Zahlen, eine Verbindung natürlicher Zahlen mit dem Operationszeichen der Subtraktion, nennt man negative Zahlen. Im Gegensatz dazu nennt man die natürlichen Zahlen auch positive und setzt ihnen das Zeichen der Addition vor. Die negativen y trägt man nach unten ab, entsprechend der Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y = 5 - x$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7.

Allgemein entstehen aus der Gleichung $y = a - x$ für $x = a$ die Zahl $a - a = 0$ für $x = a + b$, die negativen Zahlen

$$a - (a + b) = a - a - b = 0 - b = -b.$$



4. Die Gleichung $y = 12 : x$ liefert für $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 12$ die natürlichen Zahlen 12, 6, 4, 3, 2, 1. Setzt man $x = 13$, so läßt sich die Rechnung $y = 12 : 13$ nicht weiter ausführen, und man nennt $12 : 13$, das man gewöhnlich $\frac{12}{13}$ schreibt, eine gebrochene Zahl. Im Gegensatz dazu heißen die natürlichen Zahlen ganze. Je größer x wurde, desto kleiner wurde bei natürlichen Zahlen y. Ist x größer als 12, so wird y kleiner als 1 sein. Solche gebrochenen Zahlen nennt man echte Brüche. Ist $x = 5$, so ist $y = \frac{12}{5}$, dies muß zwischen 3 und 2 liegen. Zerlegt man 12 in 10 und 2, so läßt sich bei dem ersten Teil die Division aus-

Digitized by Google

Berechnet man zu einer hinreichenden Anzahl von Werten x die durch eine Gleichung zugeordneten Werte y und zeichnet die betreffenden Funktionspunkte, so soll die durch diese Punkte bestimmte Linie ein Bild des Funktionsverlaufs oder kurz ein Bild der Funktion genannt werden.

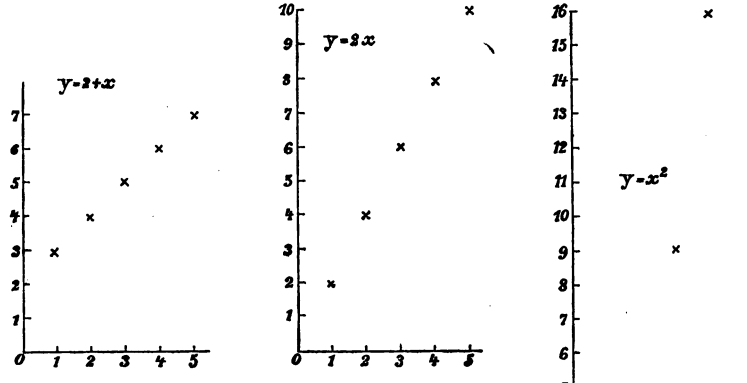
§ 123.

Werte der einfachen Funktionen für natürliche Werte des Arguments. Erweiterung des Zahlbegriffs.

1. Ist a eine natürliche Zahl, d. h. das Ergebnis des Zählens, so kann man durch Addition und Multiplikation drei einfache explizite Funktionen bilden: $y = a + x$, $y = a \cdot x$, $y = x \cdot x \cdot x \cdots (a\,\text{mal}) = x^a$,

z. B. $y = 2 + x$, $y = 2 \cdot x$, $y = x \cdot x = x^2$.

Erteilt man hierin x natürliche Werte, so erhält man auch für y natürliche Zahlen.



x	$y = 2 + x$	$y = 2x$	$y = x^2$
1	3	2	1
2	4	4	4
3	5	6	9
4	6	8	16
5	7	10	25

2. Unter denselben Voraussetzungen erhält man 4 einfache implizite Funktionen $x + y = a$, $x \cdot y = a$, $x = y^a$, $x = a^y$,

wobei $y^a = y \cdot y \cdots (a\,\text{mal})$, $a^y = a \cdot a \cdots (y\,\text{mal})$,

z. B. $x + y = 5$, $x \cdot y = 12$, $x = y^2$, $x = 10^y$.

Um diese explizit auszudrücken, muß man vier neue Operationen einführen: Subtraktion, Division, Radizierung, Logarithmierung:

$$y = a - x, \quad y = a : x, \quad y = \sqrt[a]{x}, \quad y = {}^a\log x,$$

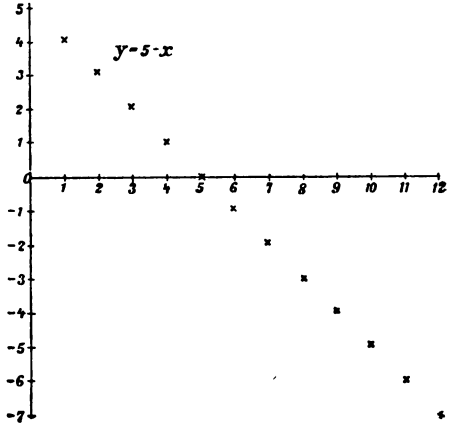
z. B. $y = 5 - x$, $y = 12 : x$, $y = \sqrt[2]{x}$, $y = {}^{10}\log x$.

Digitized by Google

Setzt man in diesen Gleichungen für x natürliche Zahlen, so wird man nur für einige y natürliche Werte finden. Man erweitert nun den Zahlbegriff und nennt alle Werte von y, die man aus diesen vier Gleichungen gewinnt, Zahlen, und zwar wenn a und x natürliche Zahlen sind, sollen die y reelle Zahlen heißen.

3. Setzt man in der Gleichung $y = 5 - x$, für x der Reihe nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw., so ist für $x = 5$: $y = 5 - 5 = 0$. Diese ist die erste künstliche Zahl. Ist $x = 6$, so ist $y = 5 - 6 = 5 - 5 - 1 = 0 - 1 = -1$, indem man die 0 fortläßt. Ebenso ist für $x = 7$

$$y = 5 - 7 = -2.$$

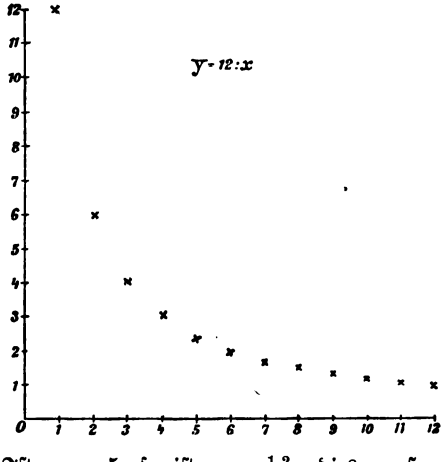


Diese Zahlen, eine Verbindung natürlicher Zahlen mit dem Operationszeichen der Subtraktion, nennt man negative Zahlen. Im Gegensatz dazu nennt man die natürlichen Zahlen auch positive und setzt ihnen das Zeichen der Addition vor. Die negativen y trägt man nach unten ab, entsprechend der Tabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y = 5 - x$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7.

Allgemein entstehen aus der Gleichung $y = a - x$ für $x = a$ die Zahl $a - a = 0$ für $x = a + b$, die negativen Zahlen

$$a - (a + b) = a - a - b = 0 - b = -b.$$



4. Die Gleichung $y = 12 : x$ liefert für $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 12$ die natürlichen Zahlen 12, 6, 4, 3, 2, 1. Setzt man $x = 13$, so läßt sich die Rechnung $y = 12 : 13$ nicht weiter ausführen, und man nennt $12 : 13$, das man gewöhnlich $\frac{12}{13}$ schreibt, eine gebrochene Zahl. Im Gegensatz dazu heißen die natürlichen Zahlen ganze. Je größer x wurde, desto kleiner wurde bei natürlichen Zahlen y. Ist x größer als 12, so wird y kleiner als 1 sein. Solche gebrochenen Zahlen nennt man echte Brüche. Ist $x = 5$, so ist $y = \frac{12}{5}$, dies muß zwischen 3 und 2 liegen. Zerlegt man 12 in 10 und 2, so läßt sich bei dem ersten Teil die Division aus-

Digitized by Google

führen, und man hat $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$, letzteres nennt man eine gemischte Zahl, $\frac{12}{5}$ einen unechten Bruch. Ist $x = 14$, so ist

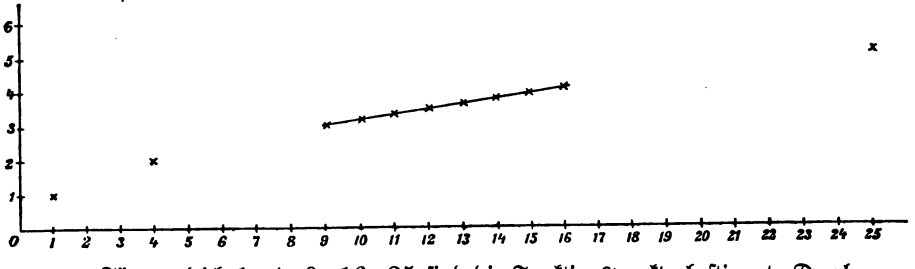
$$y = \frac{12}{14} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 7} = \frac{2}{2} \cdot \frac{6}{7} = 1 \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7}.$$

Aus Zähler (Oberzahl) und Nenner (Unterzahl) eines Bruches kann man einen gleichen Faktor fortlassen. Den Nenner 10 deutet man durch die Stellung des Zählers an und schreibt 1,2 statt $1\frac{2}{10}$.

Ist allgemein $y = a : x$, $a = nb + c$, $x = b$, so ist $y = n + \frac{c}{b}$.

Ist c von Null verschieden und kleiner als b, so heißt $\frac{c}{b}$ ein echter Bruch, $\frac{a}{b}$ ein unechter Bruch, $n + \frac{c}{b}$ eine gemischte Zahl. Ist $c = md$, $b = me$, so ist $\frac{c}{b} = \frac{d}{e}$. Ist $c = 0$, also $a = nb$, so heißt $\frac{a}{b}$ ein uneigentlicher Bruch, weil er sich durch die natürliche Zahl n genau ausdrücken läßt.

5. Die dritte Gleichung $x = y^2$ oder $y = \sqrt{x}$ liefert für x gleich 1, 4, 9, 16, 25, 36, für y die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mit steigendem x wächst auch der Wert für y. Ist $x = 30$, so ist $y = \sqrt{30}$, das sich durch natürliche Zahlen nicht weiter ausdrücken läßt. Man nennt Ausdrücke von der Form $\sqrt{30}$ irrationale Zahlen, weil sie sich auch durch einen Bruch (ratio) nicht wiedergeben lassen. Die ganzen und gebrochenen Zahlen heißen nun rationale. Doch kann man stets zwei Brüche angeben, zwischen denen eine irrationale Zahl liegt. $\sqrt{30}$ liegt zwischen $\sqrt{25}$ und $\sqrt{36}$. Wächst x von 25 bis 36, so wächst y von 5 bis 6, wächst x von 25 um 1, d. h. um den 11. Teil des Abstandes, so ist es wahrscheinlich, daß auch y um den 11. Teil seines Abstandes, d. h. $\frac{1}{11}$ wächst. Wächst x von 25 bis 30, also um 5, so wird y annähernd um $\frac{5}{11}$ wachsen. Nun ist $(5\frac{5}{11})^2 = 29\frac{9}{121}$, $(5\frac{6}{11})^2 = 30\frac{2}{121}$, $\sqrt{30}$ liegt also zwischen $5\frac{5}{11}$ und $5\frac{6}{11}$. Dies Verfahren läßt sich fortsetzen. Hier sei auf das entsprechende geometrische hingewiesen, das die bildliche Darstellung nahelegt.



Für x gleich 1, 4, 9, 16, 25 sind die Funktionspunkte bestimmt. Durchläuft x z. B. die Strecke von 9 bis 16, so wird y die Strecke von 3 bis 4 durchlaufen. Nimmt man an, daß dies längs einer geraden Linie geschieht,

Digitized by Google

so ergibt sich aus der Proportionalität der Strecken, daß annähernd $\sqrt{10} = 2\frac{1}{7}$, $\sqrt{11} = 2\frac{2}{7}$ usf. Daß die Quadratwurzeln sich streng geometrisch als Höhen rechtwinkliger Dreiecke konstruieren lassen, sei erwähnt, aber hier beiseite gelassen, da es für andere Wurzeln nicht gilt. Ebenso werde es für später verschoben, zu untersuchen, ob es noch andere Zahlen gibt, welche die Gleichung $x = \sqrt{4}$ bzw. $y = \sqrt[a]{b}$ erfüllen.

6. Die vierte Gleichung $x = 10^y$ oder $y = \log x$ liefert für x gleich 10, 100, 1000 usw., y gleich 1, 2, 3 usw. Dagegen läßt sich ein beliebiges log x, z. B. log 200, durch keine natürliche oder gebrochene Zahl genau wiedergeben. Dagegen kann man auch für log 200 zwei rationale Zahlen angeben, die untereinander beliebig wenig verschieden sind, und zwischen denen der Wert von log 200 liegt.

Um annähernd log 200 zu ermitteln, das zwischen $\log 100 = 2$ und $\log 1000 = 3$ liegt, kann man folgende Überlegung anstellen: $\log 100^{10}$ wird mit 21, $\log 1000^{10}$ mit 31 Ziffern geschrieben. Vermindert man die Anzahl der Ziffern der 10. Potenz um 1 und dividiert durch 10, so erhält man den Logarithmus. Daraus leitet man die Regel ab $\log a = \frac{z-1}{n}$, wenn a^n mit z Ziffern geschrieben wird. Nun ist $200^{10} = 2^{10} \cdot 100^{10} = 1024 \cdot 10^{10}$. Es wird also mit 24 Ziffern geschrieben. Annähernd wird also $\log 200 = 2{,}3$ sein. Das bei den Wurzeln angewandte Verfahren führt auf den allzu ungenauen Wert 2,1. Eine bildliche Darstellung wird deshalb verschoben (vgl. S. 197).

Die Logarithmen sind also wie die Wurzeln irrationale Zahlen, sie lassen sich aber nicht auf Wurzeln zurückführen bzw. durch eine endliche Zahl von Additionen und Multiplikationen in rationale Zahlen verwandeln.

Zahlen, die die letztere Eigenschaft haben, also sowohl die rationalen als auch die Wurzeln, gehören zu den algebraischen Zahlen; Zahlen, die diese Eigenschaft nicht haben, wie z. B. die Logarithmen, gehören zu den transzendenten Zahlen. Doch gibt es sowohl algebraische wie transzendente Zahlen, die sich nicht wie die irrationalen zwischen zwei rationale einordnen lassen, diese nennt man komplex und im Gegensatz dazu die rationalen und irrationalen reell.

7. Die stetige Zahlenreihe. Alle reellen Zahlen lassen sich in eine Reihe ordnen. Nennt man hierbei solche gebrochenen Zahlen wie $1\frac{2}{3}$, die mit einer ganzen Zahl übereinstimmen, uneigentliche gebrochene Zahlen, solche irrationalen, die mit ganzen Zahlen oder gebrochenen übereinstimmen, wie $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, log 100, uneigentliche irrationale Zahlen, und reduziert man innerhalb der einzelnen Klassen jede Zahl auf ihren einfachsten Wert, z. B. $\frac{4}{12}$ auf $\frac{1}{3}$, $\sqrt[6]{8}$ auf $\sqrt{2}$, so bilden alle eigentlichen reduzierten reellen Zahlen eine Reihe, in der jedes Glied größer als das vorhergehende und kleiner als das folgende ist. Bei dieser Anordnung werden alle positiven Zahlen als größer als Null, alle negativen als kleiner als Null angesehen. Man denkt hierzu eine Zahl, welche größer als alle positiven Zahlen ist, und bezeichnet

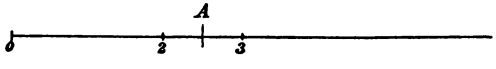
Digitized by Google

sie mit $+\infty$, und eine Zahl, die kleiner als alle negativen Zahlen (ihrem absoluten Wert nach also größer als jede negative Zahl), und bezeichnet sie mit $-\infty$.

Man stellt nun die Hypothese auf: Die Reihe der reellen Zahlen ist lückenlos oder stetig. Dabei ist nicht gemeint, daß die Gleichungen $xy = a$, $x = y^a$, $x = a^y$ für y schon alle diese Zahlen liefern, sondern nur, daß es Gleichungen gibt, die diese Zahlen liefern.

Von der Stetigkeit können wir uns nur ein geometrisches Bild machen, denn mit dem Begriff der Zahl ist für den natürlichen Verstand gerade die Unstetigkeit (Diskontinuität), das Springen von einer Zahl zur andern verbunden. Freilich hebt schon die Einführung der gebrochenen Zahlen den Begriff der benachbarten Zahl auf. Bei den ganzen Zahlen können wir 6 und 8 die Nachbarn von 7 nennen, dagegen können wir zwischen $\frac{6}{10}$ und $\frac{8}{10}$ nicht bloß $\frac{7}{10}$, sondern $\frac{61}{100}$, $\frac{63}{100}$ usw. einschieben, und bei den Irrationalzahlen konnten wohl zwei rationale Zahlen angegeben werden, zwischen denen diese Zahl lag, z. B. $\sqrt{30}$ zwischen $5\frac{5}{11}$ und $5\frac{6}{11}$, aber zwischen $5\frac{5}{11}$ und $\sqrt{30}$ lagen noch beliebig viele gemischte Zahlen, die dem Werte $\sqrt{30}$ näher kamen, allerdings dann einen größeren Nenner hatten. Trotzdem könnten die Zahlen, so unendlich viele derselben auch z. B. zwischen 5 und 6 eingeschoben werden, zwischen sich Lücken lassen (die rationalen lassen ja solche für die irrationalen), und wir können nie beweisen, sondern nur annehmen, daß alle irrationalen die Lücken zwischen den rationalen wirklich vollständig ausfüllen.

8. Die Zahlengerade. Die Punkte einer Geraden folgen lückenlos aufeinander. Trägt man auf dem Strahl OX von O aus eine Strecke von 2 cm ab, so stellt diese die Zahl 2 dar, tragen wir 3 cm von O aus ab, so stellt uns diese die Zahl 3 dar. Teilen wir die Strecke in 10 gleiche Teile, so stellen uns die Abstände der Teilpunkte von O der Reihe nach die Zahlen 2,1; 2,2; 2,3 usw. dar.



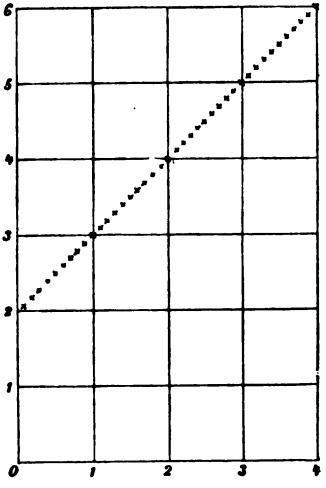
Denken wir uns jetzt (nach Dedekind) an einer beliebigen Stelle zwischen 2 und 3 etwa bei A einen Schnitt gemacht, so soll nach unserer Hypothese der Strecke OA immer eine Zahl entsprechen. Diese wird für unsere sinnliche Messung stets rational ausfallen. Wir hätten aber geometrisch z. B. $\sqrt{6{,}56}$ genau als Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten 2 und 1,6 konstruieren und dies als OA ablegen können, so würde OA die irrationale Zahl $\sqrt{6{,}56}$ darstellen.

Ebenso könnte OA eine Irrationalzahl sein, die sich durch keine Wurzeln ausdrücken läßt. Nach unserer Hypothese stellt jeder solche Schnitt eine Zahl dar. Da die Punkte der Geraden lückenlos aufeinander folgen, erhalten wir so ein Bild der lückenlosen Zahlenreihe. Die Hypothese, daß die Reihe der reellen Zahlen stetig ist, deckt sich also mit der Annahme, daß jeder von O ausgehenden Strecke, die auf der X-Achse liegt, eine Zahl entspricht.

Digitized by Google

§ 124.

Die Gerade und die Gleichung ersten Grades.

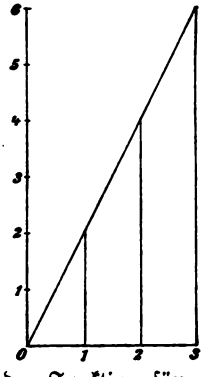


1. Es sei y von x durch die Gleichung ersten Grades

$$y = 2 + x$$

abhängig gemacht. Das Argument x soll zunächst die positiven Werte von 0,1 bis 4 annehmen, und für jedes Zehntel sei der zugehörige Wert von y berechnet und der entsprechende Funktionspunkt gezeichnet. Man erkennt und kann es auch geometrisch beweisen, daß alle diese Punkte in einer geraden Linie liegen.

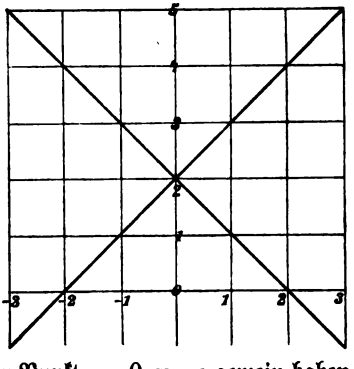
Denken wir uns jetzt für alle x von hundertstel zu hundertstel die zugehörigen y gezeichnet, so wird das Bild der Funktionspunkte sinnlich nicht mehr von einer geraden Linie zu unterscheiden sein.



Nun hatten wir die Annahme gemacht, daß durch Einfügung der irrationalen Zahlen zwischen die gebrochenen die Zahlenreihe lückenlos werde. Alle reellen x zwischen 0,1 und 4 werden demnach die horizontale Achse von 0,1 bis 4 lückenlos bedecken, und entsprechend werden die y die vertikale Achse von 2,1 bis 6 bedecken. Auch die Funktionspunkte werden infolgedessen eine Strecke lückenlos bedecken, und diese Strecke gilt jetzt als Bild der Funktion innerhalb der Grenzen $x = 0{,}1$ und $x = 4$. Eine Fortsetzung für höhere Werte von x hat keine Bedenken.

Verfahren wir ebenso mit der Gleichung $y = 2 \cdot x$, so finden wir ebenfalls einen geraden Strahl als Bild der Funktion für $x = 0{,}1$ bis $x = +\infty$.

2. Für x werden jetzt auch die Null und negative Zahlen zugelassen.



$y = a + x$ bzw. $y = 2 + x$

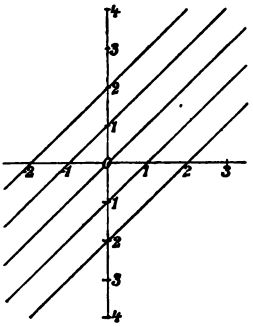
liefert für $x = 0$; $y = 2$;

für $x = -1$: $y = 1$; $x = -2$; $y = 0$;

für $x = -3$: $x = 1$;

d. h. die Gleichung $y = 2 + x$ liefert für negative x dieselben Werte wie die Gleichung $y = 2 - x$ für positive. Die Gleichungen $y = a + x$ und $y = a - x$ sind also, wenn man negative x zuläßt, nicht mehr prinzipiell verschieden. Sie stellen zwei Gerade dar, die den Punkt $x = 0$, $y = a$ gemein haben.

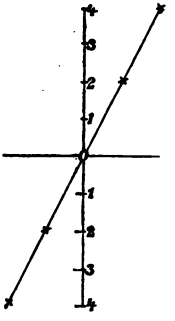
Digitized by Google



3. Wird in der Gleichung $y = a + x$ auch a Null oder eine negative Zahl, so verschiebt sich die Gerade nach unten. Die Gleichung $y = a + x$ stellt, wenn auch a veränderlich ist, eine Schar von Parallelen dar.

x	−2	−1	0	+1	+2
2+x	0	1	2	3	4
1+x	−1	0	1	2	3
0+x	−2	−1	0	1	2
−1+x	−3	−2	−1	0	1
−2+x	−4	−3	−2	−1	0

4. $y = a \cdot x$ bzw. $y = 2 \cdot x$ liefert für x gleich 0, −1, −2 die Werte $y = 0$, −2, −4. Die Gerade setzt sich über den Wert 0 nach links unten fort.

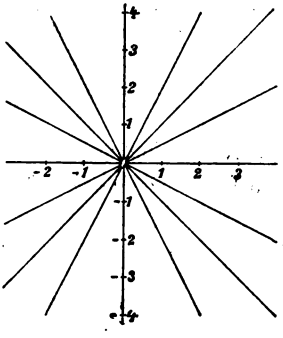


5. Wird a eine negative Zahl, so liefert $y = ax$ für positive x negative y, z. B. $y = -3 \cdot x$; die entsprechenden Werte sind

x	0	1	2	3
$y = -3x$	0	−3	−6	−9.

Nicht unmittelbar ersichtlich ist, welche Werte für negative x anzunehmen sind.

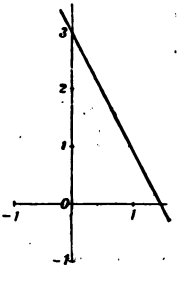
Um dies aufzuklären, ändert man a selbst in der Gleichung $y = ax$. Da zeigt sich, daß der Änderung von a eine Drehung der Geraden $y = ax$ entspricht.



x	−2	−1	0	+1	+2
$y = 2x$	−4	−2	0	+2	+4
$y = 1x$	−2	−1	0	+1	+2
$y = \frac{1}{2}x$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	+1
$y = 0 \cdot x$	0	0	0	0	0
$y = -\frac{1}{2}x$	?	?	0	$-\frac{1}{2}$	−1
$y = -1 \cdot x$	?	?	0	−1	−2
$y = -2 \cdot x$	?	?	0	−2	−4

Soll die Gleichung stets eine Gerade darstellen, so müssen die als fraglich bezeichneten Werte von y positiv genommen werden. Das Produkt zweier negativen Zahlen ist also positiv.

6. Die Gleichungen von der Form $y = a + x$, $y = a - x$, $y = ax$ lassen sich nun in eine Form zusammenfassen: $y = a_0 + a_1 x$, und diese stellt für beliebige reelle a_0 und a_1 stets eine Gerade dar. Denn durch Schiebung und Drehung kann eine Gerade in jede beliebige Lage in der Ebene gebracht werden. Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, genügt es, die Werte für $x = 0$ und $x = 1$ anzugeben, diese sind $y = a_0$ bzw. $y = a_0 + a_1$; z. B. für $a_0 = 3$, $a_1 = -2$, $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.



Digitized by Google

Ist a_0 positiv, so schneidet die Gerade die Y-Achse oberhalb des Nullpunkts, ist es negativ, unterhalb. Ist a_1 positiv, so ist der Winkel, um den die positive Richtung der X-Achse gedreht werden muß, um mit der Geraden zusammenzufallen, spitz, bei negativem a_1 stumpf.

7. Die Lösung der Gleichungen ersten Grades ist identisch mit der Auffuchung der Schnittpunkte einer Geraden mit der X-Achse.

Jede Gleichung ersten Grades kann auf die Form

$$a_0 + a_1 x = 0$$

gebracht werden; d. i. aber nur ein Spezialfall von $a_0 + a_1 x = y$, bei dem für ein bestimmtes y, nämlich 0, das zugehörige x gesucht wird.

8. Jedes System von 2 Gleichungen ersten Grades

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

hat die algebraische Lösung

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) x = B_1 C_2 - B_2 C_1,$$
$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) y = C_1 A_2 - C_2 A_1.$$

Dividiert man durch B, so ist

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1} = a_0 + a_1 x$$

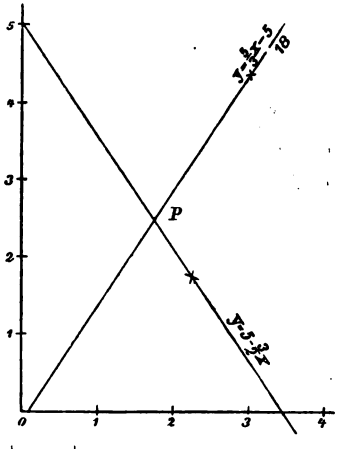
$$y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2} = b_0 + b_1 x.$$

Die Lösung des Systems ist identisch mit der Auffindung der Schnittpunkte zweier Geraden, z. B.

$$3x + 2y = 10, \qquad 5x - 3y = \frac{5}{6}$$

gehen über in

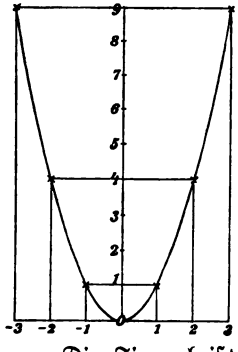
$$y = 5 - \tfrac{3}{2} x, \qquad y = \tfrac{5}{3} x - 1\tfrac{5}{18}$$



x	0	2
y	5	2

x	$\frac{1}{6}$	3
y	0	4,72

Schnittpunkt in der Figur $1\frac{2}{3} | 2\frac{1}{2}$.



Die Figur heißt Parabel.

§ 125.

Die Parabel und die quadratische Gleichung.

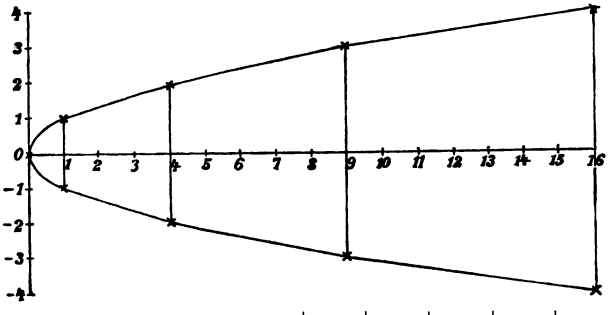
1. In die Gleichung $y = x^2$ sollen für x alle reellen Werte, also auch 0, und negativen Zahlen eintreten dürfen. Der Faktor Null macht nach dem vorigen Paragraphen jedes Produkt Null, das Produkt aus zwei negativen Zahlen ist gleich dem Produkt aus zwei absoluten oder positiven Zahlen.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Digitized by Google

Rechnung und Figur zeigen, daß reellen x stets nur positive y entsprechen, daß entgegengesetzte Werte von x denselben Wert für y liefern.

2. Untersucht man jetzt die Gleichung $x = y^2$, die identisch mit $y = \sqrt{x}$ ist, so können auch hier für beliebige positive oder negative y immer nur positive x auftreten. Dagegen gehören zu jedem Wert von x zwei entgegengesetzte Werte von y, außer für $x = 0$.

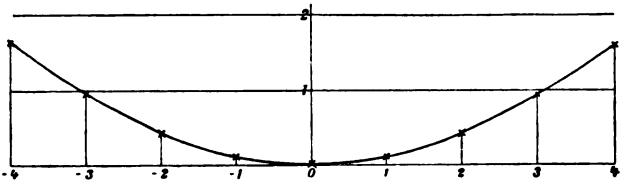


x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	$+1$ -1	$+2$ -2	$+3$ -3	$+4$ -4

3. Jede Quadratwurzel ist demnach zweideutig. Dagegen findet die Wurzel aus einer negativen Zahl kein Bild auf unserer Ebene. Es gibt also keine reelle Zahl, welche die Gleichung $y = \sqrt{x}$ für ein negatives x befriedigte. Man erweitert nun wiederum den Zahlbegriff und nennt auch die Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$ Zahlen. Da $\sqrt{36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$ ist, oder allgemein $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, läßt man diese Zerlegung auch für die Wurzeln aus negativen Zahlen gelten, schreibt also $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$. Für $\sqrt{-1}$ hat Euler 1777 den Buchstaben i eingeführt, doch benennt sie schon Descartes 1637 „imaginaire“. Der Name reell gewinnt erst im Gegensatz zu den imaginären Zahlen seine volle Bedeutung.

Bei unserer jetzigen Darstellung der Funktionen, bei welcher in einer einzigen Ebene sowohl die unabhängige als auch die abhängige Variable abgebildet wird, haben nur reelle Funktionswerte einen Punkt zum Bild. Gestattet man auch x imaginäre Werte anzunehmen, so kann man bei der vorliegenden Darstellung, die man als analytische Geometrie bezeichnet, keinen Punkt für ein solches x angeben. (Über eine andere Darstellung vgl. § 57 ff.)

4. Neben der einfachen Funktion $y = x^2$ betrachten wir jetzt die zusammengesetzte $y = ax^2$, wo a eine reelle, zunächst eine rationale Zahl bedeuten soll. Es sei $y = \frac{1}{10}x^2$.



x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	1,6	0,9	0,4	0,1	0	0,1	0,4	0,9	1,6

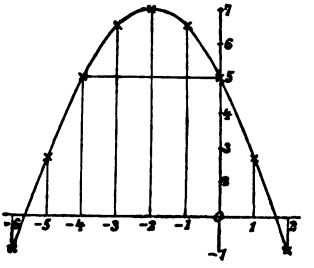
Die Figur ist wiederum eine Parabel.

Digitized by Google

5. Ist jetzt die allgemeine Funktion

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

vorgelegt, so kann man y sich in $u + v$ derart zerlegt denken, daß $u = a_0 + a_1 x$, $v = a_2 x^2$. Diese Gleichungen kann man bildlich darstellen, die erstere durch eine Gerade, die letztere durch eine Parabel. Die Addition der zu einem x gehörigen Werte u und v liefert y.



Ist $y = 5 - 2x - \frac{1}{2}x^2$, so ist

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$u = 5 - 2x$	17	15	13	11	9	7	5	3	1
$v = -\frac{1}{2}x^2$	-18	$-12\frac{1}{2}$	-8	$-4\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2
$y = u + v$	-1	$+2\frac{1}{2}$	$+5$	$+6\frac{1}{2}$	$+7$	$+6\frac{1}{2}$	$+5$	$+2\frac{1}{2}$	-1

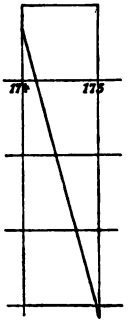
Die Gleichung stellt wiederum eine Parabel dar.

6. Sucht man den Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse, so ist diese Aufgabe identisch mit der Lösung der quadratischen Gleichung, z. B.:

$$5 - 2x - \tfrac{1}{2}x^2 = 0.$$

Diese ist auch auf geometrischem Wege lösbar. Man nimmt an, der Parabelbogen in der Nähe der x-Achse falle mit einer Geraden zusammen, d. h. die Parabel schneide die x-Achse in demselben Punkt wie die von $1\,|\,2\frac{1}{2}$ nach $2\,|\,-1$ gezogene Gerade. Diese schneidet die x-Achse ungefähr bei $x = 1{,}75$.

Nun ist $5 - 2 \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{16} = -\frac{1}{32}$, also nahezu 0. Will man den Wert genauer haben, so berechnet man y für $x = 1{,}74$ und findet $+0{,}0062$. Es war $-\frac{1}{32} = -0{,}0312$ der Wert für $x = 1{,}75$. Um zwischen diesen zu interpolieren, vergrößert man die Zeichnung auf das 100fache und findet 174,17, also $x = 1{,}7417$. Dies Verfahren, auf Millimeterpapier ausgeführt, ist bei Lösung quadratischer Gleichungen allerdings umständlich, es hat aber den Vorzug, daß man jede numerische Gleichung dadurch mit beliebiger Genauigkeit lösen kann. Arithmetisch beruht es auf der ungenauen Annahme — daher der Name Regula falsorum —, daß die Proportion besteht



$$\frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1},$$

wobei zu x_1 und x_2 die Werte y_1, y_2 bekannt, y_0 gegeben ist (hier gleich 0) und x_0 berechnet wird. Das Interpolationsverfahren bei Bestimmung von Logarithmen ist dasselbe.

Der zweite Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse liefert $x = -5{,}7417$. Die Summe der negativen Wurzeln ist $+4$, das Produkt -10.

7. Ist $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2 \left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} x + x_2 \right)$, und haben die Schnittpunkte der Parabel die Abszissen x_1 und x_2, so ist

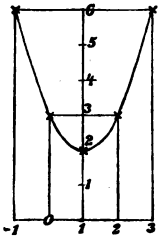
$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 x_2 \equiv \frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1}{a_2} x + x^2,$$

also $-x_1 - x_2 = \frac{a_1}{a_2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$.

Digitized by Google

Ist die Gleichung $y = 3 - 2x + x^2$ gegeben, so erhält man die zusammengehörigen Werte

x	−1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6



Die Parabel schneidet die x-Achse nicht. Es gibt also keine reellen x, welche die Gleichung $3 - 2x + x^2 = 0$ erfüllen. Löst man in der üblichen Weise, so findet man

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 4 = 0,$$

$$\text{also } x = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i.$$

Die Summe einer reellen und einer imaginären Zahl heißt **komplex** (nach Gauß, 1831). Sind zwei komplexe nur durch das Vorzeichen verschieden, so heißen sie **konjugiert**.

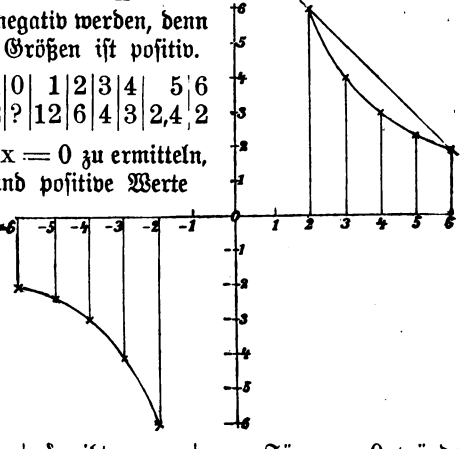
Summe und Produkt zweier konjugierten Zahlen ist reell, denn die obigen Gleichungen $-x_1 - x_2 = \frac{a_1}{a_2}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$ gelten auch hier.

§ 126.

Die Hyperbel.

1. Setzt man in der Gleichung $y = \frac{12}{x}$ für x neben den positiven auch negative Werte ein, so muß auch y negativ werden, denn das Produkt aus zwei negativen Größen ist positiv.

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	−2	−2,4	−3	−4	−6	−12	?	12	6	4	3	2,4	2



2. Um den Wert von y für $x = 0$ zu ermitteln, setzt man für x kleine negative und positive Werte

x	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	0	$+\frac{1}{1000}$	$+\frac{1}{100}$
y	−1200	−12000	?	12000	1200

Je kleiner x wird, desto größer wird y. Ist δ eine sehr kleine Zahl, so wird $\frac{12}{\delta} = \omega$ eine sehr große Zahl werden. $x = -\delta$ gibt $y = -\omega$, $x = +\delta$ gibt $y = +\omega$. Für $x = 0$ würde dies ω jeden angebbaren Wert übersteigen, und einen solchen bezeichnet man durch ∞ (unendlich).

Nähert man sich durch Verkleinerung der Werte von x der Null von rechts her, so würde man für $x = 0$ einen unendlichen positiven Wert erhalten; nähert man sich der Null von der negativen Seite, so erhält man einen unendlichen negativen Wert. Die Funktion $\frac{12}{x}$ hat also für $x = 0$ zwei gänzlich verschiedene Werte, sie ist an dieser Stelle unstetig. Daraus leitet man die Regel ab: **Durch Null darf man nicht dividieren.**

Digitized by Google

Will man dem Bruch $\frac{12}{0}$ einen Wert beilegen, so muß man annehmen, daß das positiv Unendliche mit dem negativ Unendlichen zusammenfällt, daß es also nur ein ∞ gibt. Dann würde die Hyperbel als eine im Unendlichen geschlossene Linie zu betrachten sein. Eine Vorstellung fehlt davon. Bilder kann man wohl entwerfen, ist aber dann in Gefahr, von dem Unendlichen auszusagen, was nur von seinem Bilde gilt. Auch darf nicht übersehen werden, daß zwischen der Darstellung der analytischen Geometrie, die hier zur Versinnlichung des Verlaufs der Funktionen benutzt wird, und der Darstellung der reinen Analysis, wie sie in der Gaußischen Zahlenebene (§ 57) gegeben ist, ein prinzipieller Unterschied ist. Die Gaußische Zahlenebene hat einen unendlich fernen Punkt, die Ebene der analytischen Geometrie eine unendlich ferne Gerade.

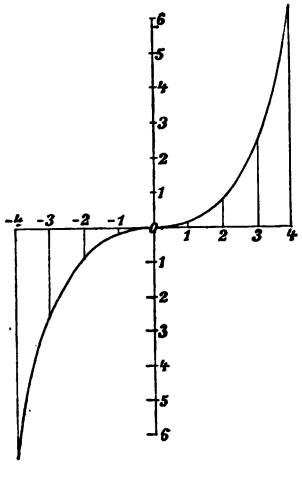
Die einfachste Annahme bleibt: Der Wert $x = 0$ ist in der Funktion $y = \frac{a}{x}$ unzulässig, ebenso ist natürlich $y = 0$ unzulässig.

Da sich die Hyperbel der x-Achse sowohl wie der y-Achse ständig nähern, ohne sie zu erreichen, nennt man diese Asymptoten (Apollonius 250 v. Chr.).

3. Die Gleichung $xy = a$ stellt also eine Hyperbel dar. Ein wesentlicher Unterschied gegen die Parabelgleichung besteht darin, daß man y nicht mehr explizit durch x, nur durch direkte Operationen (Addition, Multiplikation, Potenzierung) darstellen kann.

Arithmetisch wichtig ist, daß man mit Hilfe der Hyperbel das quadratische System $x + y = a$, $xy = b$ lösen kann. Ist $x + y = 8$, $xy = 12$, so schneidet die Gerade $x + y = 8$ die Hyperbel in zwei Punkten $2|6$ und $6|2$.

Die übrigen quadratischen Systeme können gleichfalls graphisch gelöst werden. Da hier aber y implizite gegeben ist, soll nicht näher darauf eingegangen werden. Es genüge der Hinweis, daß $x^2 + y^2 = a$ einen Kreis, $ax^2 - by^2 = c$ eine Hyperbel, $ax^2 + by^2 = c$ eine Ellipse liefern.



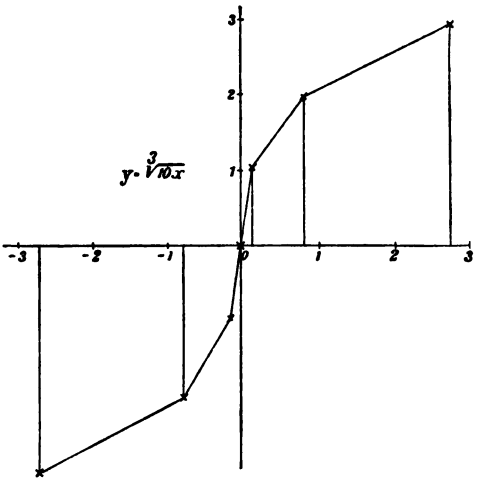
§ 127.

Graphische Lösung der kubischen Gleichung.

1. Ist $y = x^3$, so entspricht jedem reellen x ein, und nur ein reelles y, welches mit ihm von gleichem Vorzeichen ist. Denn wenn zwei negative Faktoren x ein positives Produkt geben, so werden drei negative Faktoren wieder ein negatives Produkt liefern. Der bequemen Zeichnung wegen werde $y = \frac{1}{10}x^3$ gesetzt.

x	4	−3	−2	−1	0
y	−6,4	−2,7	−0,8	−0,1	0
x	0	1	2	3	4
y	0	0,1	0,8	2,7	6,4

Digitized by Google



2. Vertauscht man x und y, so daß $x = y^3$, so ist

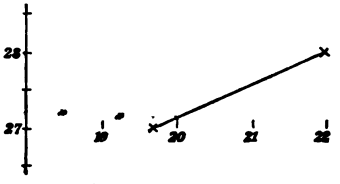
$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Im Gegensatz zu der Gleichung

$$y = \sqrt{x}$$

duldet jene negative x. Für die Zeichnung benutzen wir

$$y = \sqrt[3]{10x}$$



x	−6,4	−2,7	−0,8	−0,1	0	0,1	0,8	2,7	6,4
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

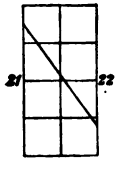
und verbinden die so gefundenen Kurvenpunkte durch gerade Linien.

Die Zeichnung ergibt $\sqrt[3]{20} = 2{,}6$. Es ist aber

$$2{,}6^3 = 17{,}576; \quad 2{,}7^3 = 19{,}683; \quad 2{,}8^3 = 21{,}952.$$

Die Zeichnung im 10fachen Maßstab ergibt bei entsprechender Genauigkeit $\sqrt[3]{20} = 2{,}714$.

3. Geht man zu der Kurve $y = a_0 + a_3 x^3$ über, so liefert der Schnittpunkt dieser Kurve mit der Abszissenachse $a_0 + a_3 x^3 = 0$, also $x = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{a_3}}$.



Ist $\sqrt[3]{10}$ gesucht, so setzt man $y = 10 - x^3$.

x	1	2	3
y	9	2	−17

x	2,1	2,2
x^3	9,26	10,65
y	+0,74	−0,65

$$x = 2{,}1 + 0{,}1 \cdot \frac{0{,}74}{1{,}39} = 2{,}1 + 0{,}053 \quad \therefore \sqrt[3]{10} = 2{,}153 \text{ statt } 2{,}154.$$

4. Auf geometrischem Wege läßt sich stets eine reelle dritte Wurzel ermitteln. Daneben können komplexe (unsichtbare) existieren, diese werden sich bei der algebraischen Lösung der kubischen Gleichung finden.

5. Die allgemeine kubische Gleichung $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$ wird gelöst, indem man die Schnittpunkte der Kurve $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ mit der x-Achse sucht.

Da man durch a_3 dividieren kann, wird der Allgemeinheit nicht Abbruch getan, wenn man die Kurve $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ untersucht.

Digitized by Google

Gegeben sei die Gleichung

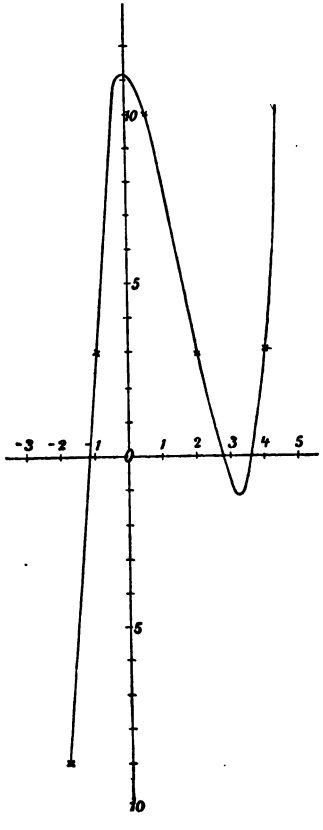
$$y = x^3 - 5x^2 + 2x + 11.$$

Nimmt man x hinreichend groß, so überwiegt x^3 alle folgenden Glieder. Für große negative x wird y negativ, für große positive positiv. Sobald das erste Glied überwiegt, kann man mit der Berechnung aufhören. Diese wird nach folgendem Schema ausgeführt:

$x = 3 \quad y = [(3 - 5) \cdot 3 + 2]3 + 11$
$= [-2 \cdot 3 + 2]3 + 11$
$= -4 \cdot 3 + 11$
$= -1$

abgekürzt $1 \quad -2 \quad -4 \quad -1$

	1	−5	+2	+11
−3)	1	−8	+26	−67
−2)	1	−7	+16	−21
−1)	1	−6	+8	+3
0)	1	−5	+2	+11
+1)	1	−4	−2	+9
+2)	1	−3	−4	+3
+3)	1	−2	−4	−1
+4)	1	−1	−2	+3
+5)	1	0	2	+21



Aus der Kurve ersieht man, daß je eine Wurzel der Gleichung zwischen −2 und −1, zwischen +2 und +3, zwischen +3 und +4 liegt. Und zwar annähernd bei −1,1; 2,6; 3,5.

Einen genaueren Wert ermittelt man durch die Regula falsorum (vgl. § 125, 6).

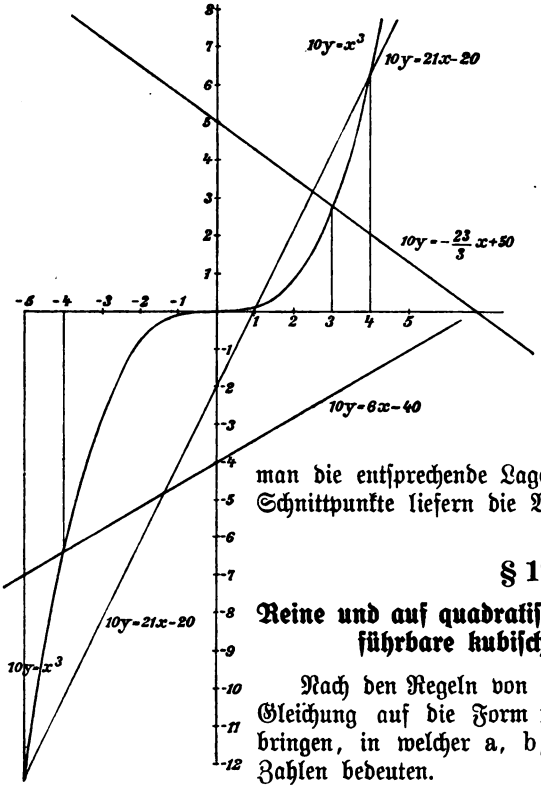
Da jede Kurve von der Form $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ für hinreichend große positive x positiv, für hinreichend negative x negativ wird, muß sie die Abszissenachse schneiden, also muß die kubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel haben.

6. Eine zweite Methode, kubische Gleichungen graphisch zu lösen, auf die J. Schröder aufmerksam gemacht hat, läßt sich besonders vorteilhaft anwenden, wenn der Koeffizient von x^2 Null ist. Die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ läßt sich in der Form $x^3 = -px - q$ schreiben; setzt man nun statt dessen zwei Gleichungen an, $y = x^3$ und $y = -px - q$, von denen die erste eine Kurve dritter Ordnung, die zweite eine Gerade darstellt, so werden die Abszissen der Schnittpunkte beider Linien die Wurzeln der kubischen Gleichung liefern. Hat ein Schnittpunkt die Koordinaten $x_1|y_1$, so ist

$$y_1 = x_1^3 \text{ und } y_1 = -px_1 - q,$$
$$\text{also } x_1^3 = -px_1 - q \text{ oder } x_1^3 + px_1 + q = 0.$$

Aus praktischen Gründen benutzt man die Kurve $10y = x^3$ und muß dann auch $10y = -px - q$ setzen.

Digitized by Google



Die nebenstehende Figur zeigt die graphische Lösung der Gleichungen

$x^3 - 21x + 20 = 0$ mit den Wurzeln $-5, 1, 4$,

$x^3 + \frac{23}{3}x - 50 = 0$ mit der Wurzel $+3$,

$x^3 - 6x + 40 = 0$ mit der Wurzel -4.

Die Kurve $10y = x^3$ braucht man nur einmal auf mm-Papier zu zeichnen. Die Gerade läßt man durch ein Lineal darstellen, dem man die entsprechende Lage gibt. Die Abszissen der Schnittpunkte liefern die Wurzeln.

§ 128.

Reine und auf quadratische Gleichungen zurückführbare kubische Gleichungen.

Nach den Regeln von § 73 läßt sich jede kubische Gleichung auf die Form $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ bringen, in welcher a, b, c positive oder negative Zahlen bedeuten.

1. Ist $a = 0$, $b = 0$, so geht sie in die reine kubische Gleichung $x^3 + c = 0$ über.

Aufgabe 1. Die reine kubische Gleichung $x^3 = c$ aufzulösen.

Auflösung. Durch Ausziehung der Kubikwurzel ergibt sich sofort ein reeller Wert für x. Setzt man diesen gleich α, also $\sqrt[3]{c} = \alpha$, $c = \alpha^3$, so geht die auf Null gebrachte Gleichung $x^3 - c = 0$ in die Gleichung

$$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) = 0$$

über. Sie wird identisch, wenn entweder $x - \alpha = 0$ oder $x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0$ wird. Es ergeben sich also für die Unbekannte folgende Werte:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \frac{\alpha}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad x_3 = \frac{\alpha}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

Folgerung. Ist $c = 1$, so ist $x^3 = 1$ und $x = \sqrt[3]{1}$. Die drei Werte sind

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad x_3 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

wo $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$, $\varepsilon_2^3 = \varepsilon_1^3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -1$.

Digitized by Google

2. Ist $c = 0$, $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$, so geht $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = 0$ über.

Aufgabe 2. Die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = 0$ aufzulösen.

Auflösung. Sondert man x ab, so erhält man:

$$x(x^2 + ax + b) = 0,$$

eine Gleichung, welche identisch wird, wenn entweder $x = 0$ oder $x^2 + ax + b = 0$ ist. Es ergeben sich also für die Unbekannte folgende drei Werte:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad x_3 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

3. Kennt man eine Wurzel der kubischen Gleichung $x = \alpha$, so ist $x^3 + ax^2 + bx + c$ durch $x - \alpha$ teilbar. Der Quotient sei $x^2 + a_1 x + b_1$. Da

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x^2 + a_1 x + b_1) = 0,$$

erhält man die beiden andern Wurzeln aus einer quadratischen Gleichung.

4. Sind α, β, γ die Wurzeln einer kubischen Gleichung, so ist diese

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + (-\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma,$$

demnach $a = -\alpha - \beta - \gamma$, $b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $c = -\alpha\beta\gamma$. Dieser Satz gilt auch für Gleichungen höheren Grades und lautet:

Ist der Koeffizient von x^n gleich 1, so bildet man die Koeffizienten der folgenden Potenzen von x aus den Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen, indem man sie der Reihe nach zu je einer, je zwei, je drei kombiniert, z. B.:

Wurzeln	neg. Wurzeln	Komb. 2. Kl.	Komb. 3. Kl.
− 5	5	− 77	− 385
−11	11	− 35	
+ 7	− 7	+ 55	
	+ 9	− 57	− 385
	$x^3 + 9x^2$	$-57x$	$-385 = 0$.

Es ist also stets $-c = \alpha\beta\gamma$. Ist c eine ganze Zahl und eine Wurzel γ ebenfalls eine ganze Zahl, so findet man diese durch Zerlegen von c in seine Teiler. Diese probiert man der Reihe nach positiv und negativ. Ist eine Wurzel γ gefunden, so bildet man $(x^3 + ax^2 + bx + c) : (x - \gamma)$ und löst die übrig bleibende quadratische Gleichung;

z. B. (Martus 1075 b) $x^3 + 9x^2 - 38x - 160 = 0$

$$160 = 1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = \cdots$$

	$[(x + 9)x - 38]x - 160$		
+ 1	10	− 28	− 188
− 1	8	− 46	− 114
.	. . . . .	. . . . .	.
+ 5	14	+ 32	0

$$(x^3 + 9x^2 - 38x - 160) : (x - 5) = x^2 + 14x + 32$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -7 + \sqrt{17}, \quad x_3 = -7 - \sqrt{17}.$$

Digitized by Google

5. Ist $a = 0$, so vereinfacht sich dies Verfahren (nach Goering).

Ist $c = \gamma \cdot \gamma'$ und γ eine Wurzel der Gleichung $x^3 + bx + c = 0$, so ist $\gamma^3 + b\gamma + \gamma\gamma' = \gamma(\gamma^2 + b + \gamma') = 0$, also $\gamma = \pm\sqrt{-b-\gamma'}$.

Das Quadrat eines Teilers muß gleich der negativen Summe des andern Teilers und des Koeffizienten von x sein;

z. B. (Martus 1069a) $x^3 + 6x + 88 = 0$

$88 = 1 \cdot 88 = 2 \cdot 44 = 4 \cdot 22 = 8 \cdot 11$; $(-4)^2 = -(6 - 22)$;

also ist $x_1 = -4$

$(x^3 + 6x + 88) : (x + 4) = x^2 - 4x + 22$; $x_2 = 2 + 3i\sqrt{2}$;

$x_3 = 2 - 3i\sqrt{2}$.

6. Auch rationale gebrochene Wurzeln kann man durch dies Verfahren ermitteln. Die Gleichung $x^3 - 1\frac{7}{8}x - \frac{9}{16} = 0$ geht durch Erweitern mit 64 in $64x^3 - 120x - 36 = 0$ über; setzt man $4x = x'$, so erhält man $x'^3 - 30x' - 36 = 0$. Da

$1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, $6^2 = -(-30-6)$, also ist $x'_1 = 6$, $x_1 = \frac{3}{2}$.

7. Jede kubische Gleichung läßt sich auf eine rein kubische dadurch reduzieren (Verfahren von M. Pasch), daß man $x = \frac{\lambda - \mu\xi}{1 - \xi}$ setzt und die unbestimmten Zahlen λ und μ so bestimmt, daß die Koeffizienten von x^2 und x gleichzeitig verschwinden.

§ 129.

Cardanische Lösung der kubischen Gleichung.

1. Entfernung des quadratischen Gliedes.

Ersetzt man in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die Unbekannte x durch $x' - \frac{a}{3}$, so erhält man eine reduzierte kubische Gleichung von der Form $x^3 + px + q = 0$.

Es ist $(x^3 + ax^2 + bx + c) : \left(x + \frac{a}{3}\right) = x^2 + \frac{2}{3}ax + b' + \frac{q}{x + \frac{a}{3}}$, wenn man $b - \frac{2}{9}a = b'$ und $\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = q$ setzt. Also

$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}ax + b'\right) + q$, ebenso ist

$x^2 + \frac{2}{3}ax + b' = \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + p$, { wenn man wieder den Rest mit p bezeichnet.

$x^3 + ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(x + \frac{a}{3}\right)p + q$

$= x'^3 + px' + q$,

wobei also q und p die bei der Division durch $x + \frac{a}{3}$ erhaltenen Reste sind.

Digitized by Google

Wendet man das Verfahren der abgekürzten Division (§ 30, Schluß) auf $(x^3+9x^2-57x-385):(x+3)$ dreimal an, so ergibt sich

$$\begin{array}{rrrrr} -3) & 1 & 6 & -75 & -160 \\ -3) & 1 & +3 & -84 & \\ -3) & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$x'^3 \qquad -84x'-160=0, \qquad \text{wo } x'=x+3.$$

Wird bei der Reduktion $q=0$, so ist $-\frac{a}{3}$ eine Wurzel der Gleichung. Wird $p=0$, so bleibt eine reine kubische Gleichung übrig.

2. Cardanische Lösung.

Die Lösung der kubischen Gleichung gelang um 1515 dem Professor in Bologna Scipione del Ferro, später Tartaglia in Brescia. 1545 veröffentlichte Cardano (aus Padua) die Lösung unter Hinweis auf jene Entdecker.

Der geniale Gedanke, der zur Lösung führte, scheint heute recht einfach: Da eine Kubikwurzel nicht genügt, verwandte man die Summe zweier Kubikwurzeln.

Ist die reduzierte kubische Gleichung $x^3+px+q=0$, und setzt man

$$x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}, \text{ so ist } x^3=z_1+z_2+3\sqrt[3]{z_1 z_2}\left(\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}\right)$$

oder $x^3=z_1+z_2+3\sqrt[3]{z_1 z_2}\cdot x$. Diese Gleichung soll nun mit der gegebenen identisch sein, d. h.

$$x^3-3\sqrt[3]{z_1\cdot z_2}\cdot x-(z_1+z_2)\equiv x^3+px+q,$$

dann muß $z_1+z_2=-q$, $z_1\cdot z_2=\left(-\frac{p}{3}\right)^3$ sein. z_1 und z_2 sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2+qz+\left(-\frac{p}{3}\right)^3=0,$$

welche die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung heißt.

Die Bildung der Resolvente geschieht nach folgendem Schema:

$$x^3+6x-7=0, \qquad x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$$

$$z^2-7z+\left(\frac{-6}{3}\right)^3=z^2-7z-8=0,$$

$$\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}+8=\frac{49}{4}+\frac{32}{4}=\frac{81}{4}=\left(\pm\frac{9}{2}\right)^2, \quad z_1=8, \quad z_2=-1,$$

$$x=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-1}=2-1=1.$$

Digitized by Google

Die allgemeine Lösung würde folgende sein:

$$x^3+px+q=0, \qquad x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2},$$

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=\left(z+\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)=0,$$

$$z_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \quad z_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ist die vorkommende Quadratwurzel reell, so ist stets nur eine reelle Wurzel der Gleichung vorhanden und durch die Cardanische Formel oder besser durch die quadratische Resolvente berechenbar.

3. Komplexe Wurzeln.

Neben einer reellen Wurzel $x_1=\alpha$ existieren zwei konjugiert komplexe Wurzeln der kubischen Gleichung, die man, wenn α eine rationale Zahl ist, am leichtesten dadurch gewinnt, daß man den Quotienten $(x^3+px+q):(x-\alpha)=0$ setzt, z. B. $x^3+6x-7=0$, $x_1=+1$, $(x^3+6x-7):(x-1)=x^2+x+7=0$,

$$x_2=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{27}, \qquad x_3=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{27}.$$

Probe:

-1	$\frac{1}{4}+\frac{27}{4}$	-7
$+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{27}$	$-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{27}$	
$+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{27}$	$-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{27}$	
x^3+0x^2	$+6x$	$-7=0.$

Allgemein ist $x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$, setzt man $\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{z_1}\right)$ und benutzt für $\sqrt[3]{1}$ die drei verschiedenen kubischen Einheitswurzeln $\varepsilon_1=\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$ $\varepsilon_2=\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\varepsilon_3=\varepsilon^3=1$, während man $\left(\sqrt[3]{z_1}\right)$ reell läßt und gleich z' setzt.

Man erhält für $\sqrt[3]{z_1}$ die drei Werte z', $\varepsilon z'$, $\varepsilon^2 z'$, ebenso für $\sqrt[3]{z_2}$ die Werte z'', $\varepsilon z''$, $\varepsilon^2 z''$. $x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ hat also neun Werte, von diesen sind aber nur drei brauchbar, weil $x_1+x_2+x_3=0$ und $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-q$ sein muß. Dies ist der Fall, wenn

$$x_1=z'+z'', \qquad x_2=\varepsilon z'+\varepsilon^2 z'', \qquad x_3=\varepsilon^2 z'+\varepsilon z'',$$

da $x_1+x_2+x_3=(1+\varepsilon+\varepsilon^2)z'+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)z''=(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(z'+z'')$,

$1+\varepsilon+\varepsilon^2$ ist gleich Null. Ebenso ist

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=z'^3+z''^3+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)z'^2z''+(1+\varepsilon+\varepsilon^2)z'z''^2=z_1+z_2=-q.$$

Digitized by Google

§ 130.

Lösung des Casus irreducibilis der kubischen Gleichung.

Führt die quadratische Resolvente $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ auf komplexe Wurzeln, so bezeichnete man diesen zunächst nicht lösbaren Fall als Casus irreducibilis. Der erste, welcher auch solche Gleichungen bewältigte, war Bombelli (1572, Bologna). Eine volle Theorie, besonders Einsicht in die Koeffizienteneigenschaften, gab Vieta (1591, Paris). Die Ausnutzung der Cardanischen Lösung auch in diesem Fall gelang aber erst nach der Entdeckung des Moivreschen Satzes Eytelwein (1824).

1. Lösung durch den Moivreschen Satz.

Sind z_1 und z_2 komplex, so setzt man (§ 60)

$$z_1 = \varrho \cos\varphi + \varrho\, i \sin\varphi, \qquad z_2 = \varrho \cos\varphi - \varrho\, i \sin\varphi, \text{ d. h.}$$

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cdot \cos\varphi, \qquad \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \varrho\, i \cdot \sin\varphi,$$

$$\varrho^2 \cos^2\varphi = \frac{q^2}{4} \qquad \varrho^2 \sin^2\varphi = -\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}, \text{ also}$$

$$\varrho^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho^2 = -\frac{p^3}{27},$$

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \cos\varphi = \frac{-q/2}{\sqrt{-p^3/27}}.$$

Nach dem Moivreschen Satz ist

$$\sqrt[3]{\cos\varphi + i \sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{3} + i \sin\frac{\varphi}{3},$$

$$\text{also } \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\varrho} \cdot \sqrt[3]{\cos\varphi + i \sin\varphi} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i \sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\varrho} \cdot \sqrt[3]{\cos\varphi - i \sin\varphi} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i \sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}.$$

Nun ist aber

$$\cos\varphi = \cos(\varphi + 360^\circ) = \cos(\varphi + 720^\circ) = \cos(\varphi + 1080^\circ) = \ldots,$$

statt $\frac{\varphi}{3}$ kann man also auch $\frac{\varphi}{3} + 120^\circ$, $\frac{\varphi}{3} + 240^\circ$, $\frac{\varphi}{3} + 360^\circ$ ... verwenden.

Digitized by Google

Da $\cos\left(\frac{\varphi}{3}+360^0\right)=\cos\frac{\varphi}{3}$ und die weiteren Werte ebenfalls mit früheren zusammenfallen (vgl. § 61), erhält man die Werte:

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^0\right)=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^0\right)=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(60^0+\frac{\varphi}{3}\right),$$

wo $\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2. Goniometrische Lösung (Vieta, 1591).

Da $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$,

so ist für $\varphi=3\alpha$, $\frac{\varphi}{3}=\alpha$, $\therefore\cos^3\frac{\varphi}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{1}{4}\cos\varphi=0$. Erweitert man dies mit $8k^3$, so ist $8k^3\cos^3\frac{\varphi}{3}-6k^3\cos\frac{\varphi}{3}-2k^3\cos\varphi=0$. Setzt man $x=2k\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$, also $x^3-3k^2\cdot x-2k^3\cos\varphi=0$, so wird diese Gleichung mit $x^3+px+q=0$ identisch, wenn $3k^2=-p$, $2k^3\cos\varphi=-q$, also $k=\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist. Demnach ist

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Statt φ darf man wieder $\varphi+360^0$ oder $\varphi+720^0$ setzen und erhält:

$$x_2=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$x_3=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$\text{wo }\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ist $\cos\varphi$ negativ, also φ stumpf, so wird x_3 positiv. Besser wählt man dann

$$\cos\psi=\frac{q}{2}:\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}},\quad\varphi=180^0-\psi,\quad x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right).$$

Digitized by Google

3. **Beispiel I.** $x^3 - 3x + 1 = 0$,
$z^2 + z - 1 = 0$, z komplex, also cas. irr.

$p = -3$, $q = 1$, $\cos\varphi = -\frac{q}{2} : \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = 120^0$,

$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 2\cos 40^0 = 1{,}532$,

$x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right) = -2\cos 20^0 = -1{,}879$,

$x_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right) = -2\cos 100^0 = +2 \cdot \cos 80^0 = 0{,}347$.

Beispiel II. $x^3 - 42x + 22 = 0$,
$z^2 + 22z - 14^3 = 0$, $14^3 > 11^2$, also cas. irr.

Num	Log	Op	Formeln
14	1,1461	: 2	
$\sqrt{14}$	0,5731	+	$p = -42$
2	0,3010	+	$q = 22$
$2\sqrt{14}$	0,8741		$2\sqrt{-\frac{p}{3}} = 2\sqrt{14}$
14	1,1461	· 3	
14^3	3,4383	: 2	$\cos\psi = 11 : \sqrt{14^3}$
$\sqrt{14^3}$	1,7192	von 9,9..	
$1 : \sqrt{14^3}$	8,2808	+	$\varphi = 180^0 - \psi$
11	1,0414	+	$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}$
$\cos 77^0\,53'$	9,3220		
$\varphi = 102^0\ 7'$			$x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$
$\cos\frac{\varphi}{3} = \cos\ 34^0\ 2'$	9,9186	+	
$2\sqrt{14}$	0,8741	+	
$x_1 = 6{,}202$	0,7927		$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(120^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$
$\cos 25^0\,58'$	9,9538	+	
$2\sqrt{14}$	0,8741	+	
$-x_2 = 6{,}728$	0,8279		
$\cos 85^0\,58'$	8,8472	+	
$2\sqrt{14}$	0,8741	+	
$x_3 = 0{,}526$	9,7213		
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$			
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 21{,}98$ statt 22			

Digitized by Google

§ 131.

Gleichungen vierten und höheren Grades.

1. Die Lösung der Gleichungen vierten Grades gelang Cardanos Schüler Ferrari schon vor 1545, indem er eine kubische Resolvente aufstellte. Die allgemeine Lösung der allgemeinen Gleichungen fünften und höheren Grades mittels Wurzelgrößen ist unmöglich, wie der Norweger Abel 1824 bewies.

Mit Hilfe transzendenter Funktionen sind auch diese lösbar, und jede Wurzel einer numerischen Gleichung kann mit beliebiger Annäherung angegeben werden. Die allgemeine Lösung spezieller Gleichungen höheren Grades ist nicht ausgeschlossen, z. B. der Gleichung $x^n + px + q = 0$.

2. Ist $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$, also $a_n = 1$, und sind $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ die Wurzeln der Gleichung, so ist $a_{n-1} = -\alpha - \beta - \gamma \cdots$, $a_{n-2} = \alpha\beta + \alpha\gamma + \cdots + \beta\gamma + \cdots$, endlich $a_0 = (-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)\cdots$, weil $y = (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdots$ ist.

Sind die a ganze Zahlen, so findet man jede ganze Wurzel dadurch, daß man a_0 in seine Teiler zerlegt, diese der Reihe nach für x einsetzt und untersucht, für welche von ihnen y verschwindet.

Die Gleichung vierten Grades $x^4 - \frac{29}{2}x^2 + 24x - \frac{135}{16} = 0$ wird zunächst mit 16 erweitert: $16x^4 - 29\cdot 8x^2 + 24\cdot 16x - 135 = 0$, statt $2x$ setzt man x' und untersucht die Funktion $y = x'^4 - 58x'^2 + 192x' - 135$. Da $1\cdot 135 = 3\cdot 45 = 5\cdot 27 = 9\cdot 15$, versucht man mit diesen Teilern der Reihe nach

$$\begin{array}{llllll}
 & \{[(x'+0)\,x' & -58]\,x' & +192\}\,x' & -135 & = y, \\
x'=1 & 1 & -57 & +135 & 0, & \\
 & x'^3 + x'^2 & -57x' & +135 & = 0, & \\
x'=3 & 4 & -45 & 0, & & \\
 & x'^2 + 4x' & -45 & = 0, & & \\
x'=5 & 9 & 0, & & & \\
 & x' + 9 & = 0. & & &
\end{array}$$

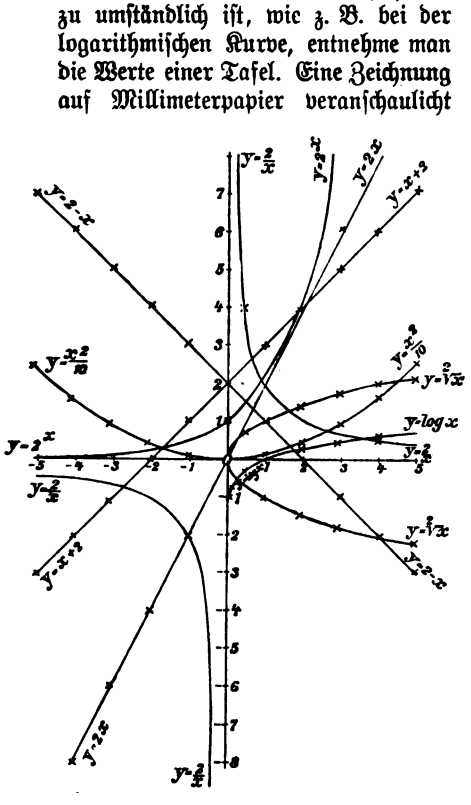
Da $x' = 2x$, sind die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{9}{2}$.

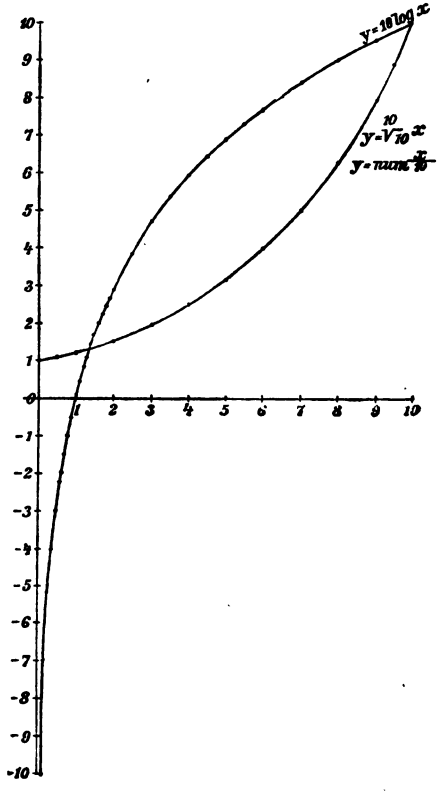
3. Bei allen numerischen Gleichungen, auch transzendenten, ist die Regula falsorum verwendbar, die mannigfache Verfeinerungen zuläßt. Das Prinzip bleibt aber immer, daß man einen kleinen Funktionszuwachs dem entsprechenden Argumentzuwachs proportional setzt. Dies haben schon Bürgi und Vieta getan. Vollkommener ist Lagranges Methode der Auflösung mittels Kettenbrüchen, wovon in § 103, 3 eine Probe für die Gleichung $10^x - 5 = 0$ gegeben ist.

4. Alle reellen Wurzeln numerischer Gleichungen lassen sich ferner dadurch finden, daß man die Schnittpunkte der Kurve $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit der x-Achse graphisch aufsucht. Die Zeichnung muß allerdings durch die Rechnung stets wieder unterstützt werden, sobald eine weitere Annäherung gesucht wird. Wesentlich gefördert wird dies Verfahren durch Anwendung der Differentialrechnung, die später geboten werden wird.

Digitized by Google

5. Eine Zusammenstellung der schon behandelten und einiger transzendenter Kurven ist in den beistehenden Figuren gegeben. Wo die Berechnung zu umständlich ist, wie z. B. bei der logarithmischen Kurve, entnehme man die Werte einer Tafel. Eine Zeichnung auf Millimeterpapier veranschaulicht





den Verlauf einer Funktion ungleich besser als eine bloße Tafel, und man kann aus ihr sogar Zwischenwerte mit leidlicher Genauigkeit entnehmen.

Digitized by Google

Zehnter Abschnitt.

Differentialrechnung.

1. Kapitel. Differentialquotienten.

§ 132.

Differentiale.

1. Sind y und x durch eine Gleichung verbunden, die außer diesen zwei Variabeln nur Konstanten enthält, so wird die Gleichung bei einem bestimmten Wert von x nur durch einen (oder mehrere) bestimmte Werte von y erfüllt werden. Der Wert von y ist also von dem von x abhängig, und man nennt y eine Funktion von x und x das Argument von y.

Geht man von einem bestimmten Wert x_1 zu einem anderen x_2 über, so nennt man die Differenz der Werte $x_2 - x_1$ den Zuwachs von x_1 und bezeichnet ihn mit $\triangle x_1$ und den Zuwachs bei einem beliebigen Werte von x mit $\triangle x$. Die Funktion nimmt entsprechende Werte y_1, y_2 an, ihr Zuwachs wird mit $\triangle y_1$ beziehungsweise $\triangle y$ bezeichnet.

Ist $y = a + bx + cx^2$,

so ist $y + \triangle y = a + b(x + \triangle x) + c(x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2)$

oder $\triangle y = b\triangle x + 2cx\triangle x + c(\triangle x)^2$.

2. Unter einem Differential versteht man einen so kleinen Zuwachs, daß sein Quadrat neben dem Wert, von welchem man ausgegangen ist, innerhalb einer vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenze keinen Einfluß auf die Rechnung ausübt, auch wenn es mit einem beliebigen aber endlich großen Faktor multipliziert wird. Für eine bestimmte Genauigkeitsgrenze und bestimmte in Betracht kommende Faktoren ist das Differential also hinreichend klein zu wählen. Man nimmt an, daß solche Differentiale auch bei beliebiger Genauigkeitsgrenze existieren, und nennt sie dann unendlich klein, da sie sich der Null beliebig nähern, ohne sie im allgemeinen zu erreichen.

Ein Differential ist also ein unendlich kleiner Zuwachs, dessen Quadrat unbeschadet der Richtigkeit der Rechnung gleich Null gesetzt werden darf.

Man bezeichnet das Differential von x mit dx, das von y mit dy.

3. Ist $y = x^3$ und wächst x um dx, so muß y um dy wachsen. Es wäre nun $y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3$. Ist dx hinreichend klein, so darf ich $y + dy = x^3 + 3x^2\,dx$ setzen, d. h. $dy = 3x^2\,dx$.

Digitized by Google

Beispiel: Sind die Kanten eines eisernen Würfels bei 0° C bis auf mm genau 1 m lang, so kann der Rauminhalt des Würfels, da die Längenmessung um 0,4 mm falsch sein kann, $0{,}9996^3 = 0{,}998799519936$ cbm betragen, d. h. um rund 1,2 cbdm kleiner als ein cbm sein. Dehnt der Würfel sich nun infolge einer Temperaturerhöhung von 100° C in jeder Richtung um 1,1 mm aus, so würde sein Rauminhalt rechnerisch $1{,}0011^3 = 1{,}003303631331$ cbm betragen. Da aber die cbdm schon um 1,2 größer oder kleiner sein konnten, hat es keinen Sinn, die cbcm und cbmm noch zu berücksichtigen. Man schreibt also $1{,}0011^3 = 1{,}0033$ mit hinreichender Genauigkeit.

In diesem Fall wird also kein Fehler begangen, wenn man das Quadrat des kleinen aber doch leicht angebbaren Kantenzuwachses, nämlich 11 : 10000 gegenüber der Länge 1 der Kante, bei Berechnung des Volumens des vergrößerten Würfels vernachlässigt. 11 : 10000 verhält sich also hier so, wie es von einem Differential gefordert wird. Da es endliche Größen gibt, die bei bestimmter Genauigkeitsgrenze die gewünschte Eigenschaft haben, ist die Annahme berechtigt, daß es unendlich kleine Größen gibt, die bei beliebiger Genauigkeitsgrenze die Bedingung erfüllen.

4. Der Ausdruck Differential darf, wenn keine Genauigkeitsgrenze angegeben ist, nur auf unendlich kleine Größen angewandt werden. Bei jeder Versinnlichung durch Zahlen oder Zeichnung werden die Differentiale natürlich endlich groß abgebildet, auch schadet es nichts, wenn in der Vorstellung stets mit endlichen hinreichend kleinen Größen statt der Differentiale operiert wird, was streng genommen nur gestattet ist, wenn eine Genauigkeitsgrenze angegeben ist.

5. Wenn wir annehmen, daß x alle reellen Werte durchläuft, so wird es stets möglich sein, den Zuwachs $\triangle x$ so klein zu machen, daß sein absoluter Betrag unter einer beliebigen Größe δ bleibt. Dagegen ist es nicht sicher, ob die zugehörigen Funktionszuwächse $\triangle y$ dann unter einer bestimmten Größe ε bleiben. Wir finden z. B. $\operatorname{tg}(90^0 - \delta) = +\omega$, $\operatorname{tg}(90^0 + \delta) = -\omega$, wo ω eine sehr große Zahl ist. Die Funktion $y = \operatorname{tg} x^0$ ist bei $x = 90$ unstetig.

Eine Funktion ist stetig innerhalb bestimmter Grenzen, wenn einem Argumentdifferential ein Funktionsdifferential entspricht.

6. Man kann das Argumentdifferential dx im allgemeinen positiv und für eine Rechnung konstant nehmen. Denken wir uns darunter z. B. für eine Zeichnung, deren Genauigkeit nicht unter $\frac{1}{10}$ mm geht, ein Tausendstel mm. Das Quadrat wäre $1 : 10^6$ mm, und dieses würde selbst durch den Faktor 10000, der größte, der bei den üblichen Dimensionen eines Zeichenbretts zulässig ist, nicht zu einer darstellbaren Größe.

Das Argumentdifferential ist stets von Null verschieden, man darf also durch dasselbe dividieren.

Digitized by Google

Dividiert man eine endliche Größe durch ein Differential, so wird der Wert, wenn das Differential unendlich klein ist, unendlich groß werden. Dies „unendlich groß" ist aber scharf zu unterscheiden von der mit ∞ bezeichneten Zahl, man bezeichnet es mit ω. Es ist $\infty = \frac{1}{0}$, $\omega = \frac{1}{\delta}$. Dabei ist der Übergang von ω zu ∞ aber nicht einfach zu denken. In unserm Beispiel war $\delta = \frac{1}{1000}$ mm, ist $1 = 1$ mm, so wäre $\frac{1}{\delta} = 1000 = \omega$; $\delta^2 = \frac{1}{10^6}$, $\omega^2 = 10^6$; $\delta^3 = \frac{1}{10^9}$, $\omega^3 = 10^9$ usw. Ebenso verhalten sich die unendlich kleinen Differentiale, d. h. dx^2 (wie man für $(dx)^2$ gewöhnlich schreibt) ist wieder ein Differential von dx, neben dx und dx^2 kann man dx^3 vernachlässigen. dx^3 ist ein Differential von dx^2, neben dx^2 und dx^3 kann man dx^4 vernachlässigen. Dabei ist dx^n ein unendlich Kleines n^{ter} Ordnung, aber von 0 verschieden. Ebenso ist ω ein unendlich Großes erster Ordnung, ω^2 ein unendlich Großes zweiter Ordnung usf. ∞ ist also erst ein unendlich Großes unendlicher Ordnung, wie Null ein unendlich Kleines unendlicher Ordnung ist. Es wäre also $\delta^\infty = 0$, $\frac{1}{\delta^\infty} = \omega^\infty = \infty$.

7. Das Funktionsdifferential ist keine konstante Größe, denn es hängt außer von dx von x ab.

Ist $y = x^3$, so ist $dy = 3x^2\,dx$. Es kann also bei positiven von Null verschiedenen dx selbst Null und negativ werden. Man darf also durch dy nicht immer unbesehen dividieren, da es auch Null werden kann. Diese Eigenschaft teilt es aber mit den Variabeln x. Wir dividieren nun durch die Variable x, aber unter Vorbehalt, und haben z. B. für die kritische Stelle $\frac{a}{0}$ das Zeichen ∞ eingeführt, wobei sich zeigte, daß $+\infty$ von $-\infty$ nicht verschieden ist. In gleicher Weise dividiert man durch dy unter dem Vorbehalt, daß an der Stelle, wo $dy = 0$ wird, eine besondere Untersuchung erforderlich ist.

Dagegen nimmt man an, daß an einer stetigen Stelle der Funktion dy stets so klein bleibt, daß sowohl $(dy)^2$ als auch $dx \cdot dy$ neben auftretenden endlichen Größen einfach gleich Null gesetzt werden darf.

8. Ist y eine Funktion von x, so ist auch x eine Funktion von y, die man die inverse nennt.

Ist z. B. $y = 10^x$, so ist $x = \log y$. Im zweiten Fall ist y das Argument, x die Funktion. Nun kann es vorkommen, daß bei der Urfunktion dy Null wird, während dx von Null verschieden ist. An der entsprechenden Stelle der inversen Funktion kann eine Unstetigkeit eintreten. Man darf deshalb die Differentiale der Urfunktion und der inversen nicht ohne weiteres gleich setzen und muß jedenfalls den Vorbehalt machen, daß an der betreffenden Stelle keine Unstetigkeit eintritt. Dies soll im folgenden stillschweigend geschehen.

Digitized by Google

§ 133.
Differential-Quotient.

1. Wenn es auch praktisch vorteilhaft ist, mit Differentialen zu rechnen, so sind sie doch der sinnlichen Vorstellung, wenn überhaupt, schwer zugänglich, weil es eben unendlich kleine Größen sind. Diese unendlich kleinen Größen haben aber die Eigenschaft, daß ihr Verhältnis im allgemeinen einen endlichen Wert hat. Das Verhältnis zweier Differentiale heißt Differentialquotient.

2. Dividiert man das Funktionsdifferential durch das Argumentdifferential, so nennt man diesen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ die Ableitung der Funktion y und bezeichnet sie mit y'.

Die Ableitung ist i. a. wieder eine Funktion von x und wird wieder eine Ableitung haben. Diese nennt man die zweite Ableitung von y und bezeichnet sie mit y''.

$$y = x^3, \quad y+dy = (x+dx)^3 = x^3 + 3x^2dx, \; dy = 3x^2dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3x^2, \; y'+dy' = 3(x+dx)^2 = 3x^2 + 6x\,dx, \; dy' = 6x\cdot dx$$

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = 6x, \; y''+dy'' = 6(x+dx) = 6x + 6dx, \quad dy'' = 6\cdot dx$$

$$\frac{dy''}{dx} = y''' = 6, \quad y'''+dy''' = 6 \qquad dy''' = 0,$$

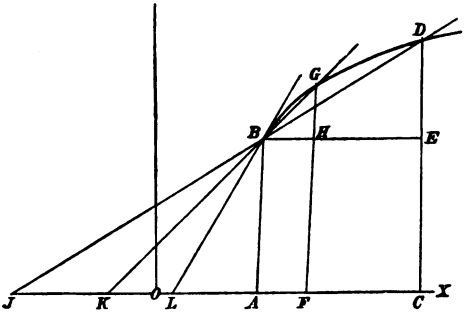
$$\frac{dy'''}{dx} = y'''' = 0$$

3. Da eine Konstante ihrer Natur nach unabhängig von einer Variabeln ist, so kann sie auch durch einen Zuwachs der Variabeln nicht verändert werden. Das kann man in der Form ausdrücken: das Differential einer Konstanten ist Null oder $dc = 0$. Da das Differential des Arguments nach Voraussetzung von Null verschieden ist, ist der Differentialquotient einer Konstanten auch Null $\frac{dc}{dx} = 0$. Das hat natürlich nur Sinn, wenn man annimmt, daß eine Funktion an einer Stelle (oder eine ihrer Ableitungen überhaupt) einen konstanten Wert annimmt. Dann ist an dieser Stelle die Ableitung 0, oder überhaupt die nächste Ableitung Null. Ist $y = a + bx + cx^2$, so wird bei $x = 0$ die Funktion $y = a$, $y' = 0$ sein. Ebenso war oben $y''' = 6$, also $y'''' = 0$.

4. Das Bilden der Ableitung ist eine Operation, die man symbolisch durch $\frac{d}{dx}$ bezeichnet, wenn x das Argument ist, nach welchem differenziert wird. Es ist also $y' = \frac{d}{dx}y$, $y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right) = \frac{d^2}{(dx)^2}y = \frac{d^2y}{dx^2}$. Letztere Schreibweise ist die gebräuchlichste.

Digitized by Google

5. Stellt man die Funktion graphisch durch eine Kurve dar, so stellen die Strecken der X-Achse von O gemessen die Werte des Arguments x, die Abstände der Funktionspunkte von dieser Achse die Werte der Funktion y für das dem Fußpunkt entsprechende x dar. Dem Argument OA entspricht also der Funktionswert AB. Wächst $x = OA$ um $AC = \triangle x$, so wächst $y = AB$ um $ED = \triangle y$. Der „Differenzenquotient“ $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{ED}{BE}$ wird durch



tg EBD angegeben, wenn man sich die Sehne BD gezogen denkt. Verlängert man diese bis zum Schnittpunkt J mit der X-Achse, so ist für $\triangle x = AC$ demnach $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{ED}{BE} = \text{tg EBD} = \text{XJB}$. Läßt man $\triangle x$ sich verkleinern, etwa auf AF, so ist $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{HG}{BH} = \text{tg HBG} = \text{tg XKB}$. Die Sehne BG ist hier nur wenig von dem Bogen BG verschieden. Denkt man sich $\triangle x$ mehr und mehr verkleinert, so wird der Punkt G dem Punkte B näher und näher rücken, der Schnittpunkt der Sekante wird dabei weiter nach rechts wandern, immer aber wird die Sekante einen bestimmten Winkel mit OX bilden, dessen tg gleich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist. Macht man endlich $\triangle x$ unendlich klein, so wird auch $\triangle y$ unendlich klein, der Funktionspunkt wird B unendlich nahe kommen, der Bogen nicht mehr von der Sehne, die Sekante nicht mehr von der geometrischen Tangente BL im Punkte B unterscheidbar sein. Es geht dadurch

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \text{ über in } \frac{dy}{dx}, \text{ und es wird } \frac{dy}{dx} = \text{tg XLB sein.}$$

Wird die Funktion durch eine Kurve dargestellt, so ist der Differentialquotient für einen bestimmten Punkt gleich dem Tangens des Neigungswinkels der Kurventangente dieses Punktes gegen die X-Achse.

6. Nachdem Descartes 1637 die Funktionen durch Kurven systematisch dargestellt hatte, stellte 1666 Newton Untersuchungen über das Verhältnis eines unendlich kleinen Funktionszuwachses zu dem entsprechenden Argumentzuwachs an und nannte dies Verhältnis die Fluxion der Funktion an der betreffenden Stelle. Seine Untersuchungen wurden aber später veröffentlicht als die im Jahre 1676 nachweislich begonnenen Arbeiten Leibniz' über die von diesem Differentialquotienten genannten Verhältnisse. In den Ruhm der Entdeckung der Eigenschaften der Differentialquotienten und der Erfindung der Differentialrechnung teilen sich also diese beiden großen Mathematiker.

Digitized by Google

§ 134.

Differentialquotient einer Potenz.

1. $y = x^n$, $y' = ny^{n-1}$, $d(x^n) = n \cdot x^{n-1}\, dx$.

Beweis. $y + \triangle y = (x + \triangle x)^n$

$= x^n + n \cdot x^{n-1} \triangle x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\triangle x)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} (\triangle x)^3 + \cdots$

$y + dy = n \cdot x^n + n x^{n-1}\, dx$

$dy = n \cdot x^{n-1}\, dx$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Verwandt ist der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten und die Annahme, daß $(\triangle x)^2$ beim Übergang zu $(dx)^2$ verschwindet.

2. $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$, $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$.

Beweis. $y + \triangle y = \frac{1}{x + \triangle x}$; $1 = (x + \triangle x)(y + \triangle y)$

$1 = xy + y \triangle x + x \triangle y + \triangle x \triangle y$

$1 = xy + y \cdot dx + x dy$, da $1 = xy$ folgt

$0 = y dx + x \cdot dy$, da $y = \frac{1}{x}$ ist auch

$$\frac{dx}{x} + x \cdot dy = 0$$

$$dy = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Verwandt ist die Annahme, daß das Produkt zweier Differenzen $\triangle x \cdot \triangle y$ beim Übergang zu Differentialen $dx \cdot dy$ gleich Null gesetzt werden kann.

Anmerkung. Setzt man $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und differenziert nach Regel 1, so erhält man $y' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. Regel 1 gilt also auch für $n = -1$.

3. $y = \frac{1}{x^m}$, $y' = \frac{-m}{x^{m+1}}$, $d\frac{1}{x^m} = \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$.

Beweis. $y \cdot x^m = 1$; $y + \triangle y = \frac{1}{(x + \triangle x)^m}$

$1 = (y + \triangle y)(x^m + m x^{m-1} \triangle x + \binom{m}{2} x^{m-2} (\triangle x)^2 + \cdots)$

$1 = y \cdot x^m + x^m \triangle y + m y \cdot x^{m-1} \triangle x + m \cdot x^{m-1} \triangle x \cdot \triangle y + \cdots$

$1 = y \cdot x^m + x^m dy + m y x^{m-1}\, dx$,

Digitized by Google

die folgenden Glieder fallen fort, da das Produkt zweier Differentiale vernachlässigt wird. Da $1 = y \cdot x^m$ ist

$$x^m\,dy + my \cdot x^{m-1}\,dx = 0, \text{ da}$$

$$y \cdot x^{m-1} = \frac{y \cdot x^m}{x} = \frac{1}{x} \text{ ist, wird } x^m\,dy + \frac{m\,dx}{x} = 0$$

$$dy = \frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m}{x^{m+1}}.$$

Anmerkung. Setzt man $y = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ und differenziert nach Regel 1, so erhält man $y' = -mx^{-m-1} = \frac{-m}{x^{m+1}}$. Regel 1 gilt also auch, wenn n eine negative ganze Zahl ist.

4. $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Beweis.

$$y + \triangle y = \sqrt{x + \triangle x}$$

$$(y + \triangle y)^2 = x + \triangle x$$

$y^2 + 2y\triangle y + (\triangle y)^2 = x + \triangle x$; beim Übergang zu Differentialen verschwindet dy^2

$$y^2 + 2y\,dy = x + dx, \text{ da } y^2 = x$$

$$2y\,dy = dx$$

$$dy = \frac{dx}{2y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Anmerkung. Setzt man $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und differenziert nach 1, so erhält man $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Regel 1 gilt also auch für $n = \frac{1}{2}$.

5. $y = \sqrt[3]{x}$, $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Beweis.

$$\sqrt[3]{x + \triangle x} = y + \triangle y$$

$$x + \triangle x = (y + \triangle y)^3 = y^3 + 3y^2\triangle y + 3y(\triangle y)^2 + (\triangle y)^3$$

$$x + dx = y^3 + 3y^2\,dy$$

$$dx = 3y^2\,dy$$

$$dy = \frac{dx}{3y^2} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Digitized by Google

Anmerkung. Nach Regel 1 ist $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Regel 1 gilt auch für $n = \frac{1}{3}$.

6. $y = \sqrt[m]{x}$, $y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$, $d\sqrt[m]{x} = \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$.

Beweis. $\sqrt[m]{x + \triangle x} = y + \triangle y$.

$$x + \triangle x = (y + \triangle y)^m$$
$$= y^m + m y^{m-1} \triangle y + \binom{m}{2} y^{m-2} (\triangle y)^2 + \cdots$$
$$x + dx = y^m + m y^{m-1} dy$$
$$dx = m \cdot y^{m-1} dy$$
$$dy = \frac{dx}{m \cdot y^{m-1}} = \frac{dx}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}}$$

Anmerkung. Nach Regel 1 behandelt $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$,

$$y' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{m x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{x}\right)^{m-1}}$$

Regel 1 gilt also auch für gebrochene n.

7. $y = a$, $y' = 0$, $\frac{da}{dx} = 0$.

Beweis. Eine Konstante kann nicht wachsen, da sie stets denselben Wert hat. Es ist $y_2 = a$, $y_1 = a$, wenn y_2 und y_1 zwei zu x_2 und x_1 gehörige Werte sind. Demnach ist $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a - a}{\triangle x}$, also $\triangle y = 0$.

Die Ableitung sowohl wie das Differential einer Konstanten sind 0.

Anmerkung 1. Setze ich $a = a \cdot 1$ und statt 1 das ihm gleiche x^0, so ist $y = a \cdot x^0$. Behandelt man dies nach 1, so erhält man $y^1 = 0 \cdot a \cdot x^{-1} = 0$. Also gilt (1) auch hier.

Anmerkung 2. Die Regel

$$d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx$$

gilt jetzt für jeden positiven und negativen rationalen Wert von n. Da nach § 51 unter a^v, wo v eine irrationale Zahl bedeutet, a^w verstanden werden soll, wo w eine rationale Zahl ist, die v hinreichend nahe kommt, so kann die Regel auch auf irrationale n, d. h. auf alle reellen n ausgedehnt werden.

Digitized by Google

8. $y = a \cdot x^n$, $y' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$, $d(ax)^n = a \cdot d(x^n) = n \cdot a \cdot x^{n-1} dx$.

Beweis. $y + \triangle y = a(x + \triangle x)^n = a(x^n + n x^{n-1} \triangle x + \cdots)$

$$y + \triangle y = a \cdot x^n + a \cdot n \cdot x^{n-1} \triangle x + a \cdot \binom{n}{2} x^{n-2} (\triangle x)^2 + \cdots$$

$$y + dy = a x^n + a \cdot n \cdot x^{n-1} dx$$

$$dy = a \cdot n \cdot x^{n-1} dx$$

$$y' = n \cdot a \cdot x^{n-1}.$$

Die Ableitung eines Produkts aus einer Konstanten und einer Potenz der Variabeln ist gleich dem Produkt aus der Konstanten mit der Ableitung der Potenz der Variabeln.

9. $y = a \cdot x^n$, $y' = n a x^{n-1}$, $y'' = (n-1) \cdot n \cdot a \cdot x^{n-2}$

$y''' = (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a x^{n-3} \cdots$, $y^{(n)} = n! \cdot a$.

Beweis. Ist $y' = n a \cdot x^{n-1}$, so kann man die Konstante na absondern und x^{n-1} differenzieren, das ergibt $(n-1) \cdot x^{n-2}$; also $y'' = (n-1) \cdot n \cdot a \cdot x^{n-2}$. In gleicher Weise fährt man fort.

Nach § 133, 4 setzt man

$$y'' = \frac{d^2}{(dx)^2}(y) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3}{(dx)^3}(y) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

§ 135.

Ableitung einer Funktion von Funktionen.

1. $y = u + v$, $y' = u' + v'$, $d(u+v) = du + dv$.

Beweis. y, u, v seien Funktionen von x. Die einem Zuwachs $\triangle x$ entsprechenden Zuwächse seien $\triangle y$, $\triangle u$, $\triangle v$,

$$y + \triangle y = u + \triangle u + v + \triangle v$$

$$\triangle y = \triangle u + \triangle v$$

, bei Division durch $\triangle x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$y' = u' + v'.$$

2. $y = u - v$, $y' = u' - v'$, $d(u-v)\, du - dv$.

Beweis entsprechend 1.

3. $y = u \cdot v$, $y' = vu' + uv'$, $d(u \cdot v) = v du + u dv$.

Beweis. $y + \triangle y = (u + \triangle u)(v + \triangle v)$

$$= uv + v \triangle u + u \triangle v + \triangle u \triangle v$$

$$\triangle y = v \triangle u + u \triangle v + \triangle u \triangle v$$

$$dy = v du + u dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} = vu' + uv'$$

Digitized by Google

4. $y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$

Beweis. $y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v}.$

$u + \triangle u = (y + \triangle y)(v + \triangle v) = yv + v\triangle y + y\triangle v + \triangle y \cdot \triangle v$

$u + du = vy + vdy + ydv$, da $u = vy$ ist

$du = vdy + ydv$, da $y = \frac{u}{v}$ ist

$du = v\,dy + \frac{u}{v}dv$

$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

$u' = v \cdot y' + \frac{u}{v}v'$

$v^2 y' = vu' - uv'.$

5. $y = u \cdot v, \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$

Beweis. Nach 3 war

$y' = vu' + uv'$, also wenn man durch uv dividiert, $\frac{y'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$

Anmerkung. Die Ähnlichkeit dieser Formel mit $\log y = \log u + \log v$ rechtfertigt den hierfür gebräuchlichen Namen Logarithmische Differentiation, der später noch weitere Begründung finden wird.

6. $y = \frac{u}{v}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$

Beweis. Nach 4 war

$v^2 y' = vu' - uv'$

$y' = \frac{u'}{v} - \frac{u}{v} \cdot \frac{v'}{v}$, multipliziert man mit $\frac{v}{u}$

$\frac{v}{u} \cdot y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

oder aus $u = vy$ folgt nach 5

$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} + \frac{dy}{y}$

$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$

Anmerkung. Auch dies heißt logarithmische Differentiation, vgl. $\log y = \log u - \log v$.

Digitized by Google

7. $y = z^n$, $\frac{y'}{y} = n\frac{z'}{z}$, $y' = n \cdot z^{n-1} \cdot z'$,

$$\frac{d(z^n)}{z^n} = n\frac{dz}{z}, \quad d(z^n) = n \cdot z^{n-1} \cdot dz.$$

Beweis. α) n sei eine natürliche Zahl.

Nach 5 ist, wenn $y = z \cdot z \cdot z \cdots$ (n mal)

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} + \frac{z'}{z} + \cdots (n\text{ mal}) = n\frac{z'}{z},$$

ebenso ist $\frac{d(z^n)}{z^n} = \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z} + \cdots (n\text{ mal}) = n\frac{dz}{z}$.

Aus $\frac{y'}{z^n} = n\frac{z'}{z}$ folgt $y' = n z^{n-1} z'$.

β) $n = 0$,

$y = z^0 = 1$. Der Zuwachs einer Konstanten ist Null. $y + dy = 1 + 0$, also $dy = 0$. Die Regel $\frac{y'}{y} = n\frac{z'}{z}$ liefert für $n = 0$ auch $y' = 0$. Also gilt sie für den Fall $n = 0$.

γ) n negativ gleich $-m$

$y = z^{-m}$, $y \cdot z^m = 1$; nach 5 ist $\frac{dy}{y} + \frac{dz^m}{z^m} = \frac{0}{1}$

nach α ist $\frac{dz^m}{z^m} = m\frac{dz}{z}$, also $\frac{dy}{y} = -m\frac{dz}{z}$

$$\therefore \frac{y'}{y} = -m\frac{z'}{z}, \text{ da } -m = n, \text{ ist } \frac{y'}{y} = n \cdot \frac{z'}{z}.$$

δ) n gebrochen, gleich $\frac{1}{m}$

$y = z^{\frac{1}{m}}$, $z = y^m$; nach α ist $\frac{dz}{z} = \frac{dy^m}{y^m} = m\frac{dy}{y}$

$$\therefore \frac{dy}{y} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dz}{z}, \text{ da } \frac{1}{m} = n \text{ ist } \frac{dy}{y} = n\frac{dz}{z} \text{ und } \frac{y'}{y} = n\frac{z'}{z}.$$

Anmerkung. Die Formel

$$\frac{d(z^n)}{z^n} = n \cdot \frac{dz}{z}$$

umfaßt auch die Formeln des § 3. Schreibt man nämlich

$$\frac{(z^n)'}{z^n} = n\frac{z'}{z}$$

und berücksichtigt, daß $z' = \frac{dz}{dx}$ für $z = x$ in $x' = \frac{dx}{dx} = 1$ übergeht, so erhält man $\frac{(x^n)'}{x^n} = n \cdot \frac{1}{x}$ oder $\frac{d(x^n)}{x^n} = n\frac{dx}{x}$.

Digitized by Google

Die Analogie mit den Logarithmen ist augenfällig.

$$\log uv = \log u + \log v, \quad \log \frac{u}{v} = \log u - \log v, \quad \log z^n = n \log z$$

$$\frac{d\,uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}, \qquad \frac{d\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \qquad \frac{dz^n}{z^n} = n\frac{dz}{z}.$$

Ist $y = \frac{u^r}{v^s}$, so ist $\frac{dy}{y} = \frac{du^r}{u^r} - \frac{dv^s}{v^s} = r \cdot \frac{du}{u} - s\frac{dv}{v}$

oder $\frac{y'}{y} = r \cdot \frac{u'}{u} - s \cdot \frac{v'}{v}$.

8. Ist y eine Funktion von z, und z eine Funktion von x, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{dy}{dz} \cdot z'.$$

Beweis. Ist $y = f(z)$ und $z = g(x)$, so ist $y = f[g(x)]$, also y eine Funktion von x. Ist $y_1 = f(z_1)$, $y_2 = f(z_2)$ und $z_1 = g(x_1)$ und $z_2 = g(x_2)$, so ist

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle z} \cdot \frac{\triangle z}{\triangle x}.$$

Dies gilt auch beim Übergang zu unendlich kleinen Differenzen, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{dy}{dz} \cdot z'.$$

Beispiele. (Dölp-Netto 32.)

1) $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^3}$. Setze $u = 2x^{-2}$, $v = 3(1-x)^{-3} = 3z^{-3}$, $u' = -4x^{-3}$, $v' = -9z^{-4} \cdot z'$, $z = 1 - x$, $z' = -1$. $\therefore v' = 9(1-x)^{-4}$, $y' = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1-x)^4}$. (Regeln 1, 7, 8.)

2) (Dölp-Netto 60.) $y = \frac{(a+x^2)^3}{(b-x^3)^2} = \frac{u^3}{v^2}$, $u' = 2x$, $v' = -3x^2$. (Regeln 6, 7, 8.)

$$\frac{y'}{y} = 3\frac{u'}{u} - 2\frac{v'}{v} = \frac{6x}{a+x^2} + \frac{6x^2}{b-x^3} = \frac{6x(b-x^3+ax+x^3)}{(a+x^2)(b-x^3)}$$

$$y' = \frac{6x(b+ax)}{(a+x^2)\cdot(b-x^3)} \cdot \frac{(a+x^2)^3}{(b-x^3)^2} = \frac{6a(b+ax)(a+x^2)^2}{(b-x^3)^3}.$$

9. Ist y eine Funktion von u und v, so ist

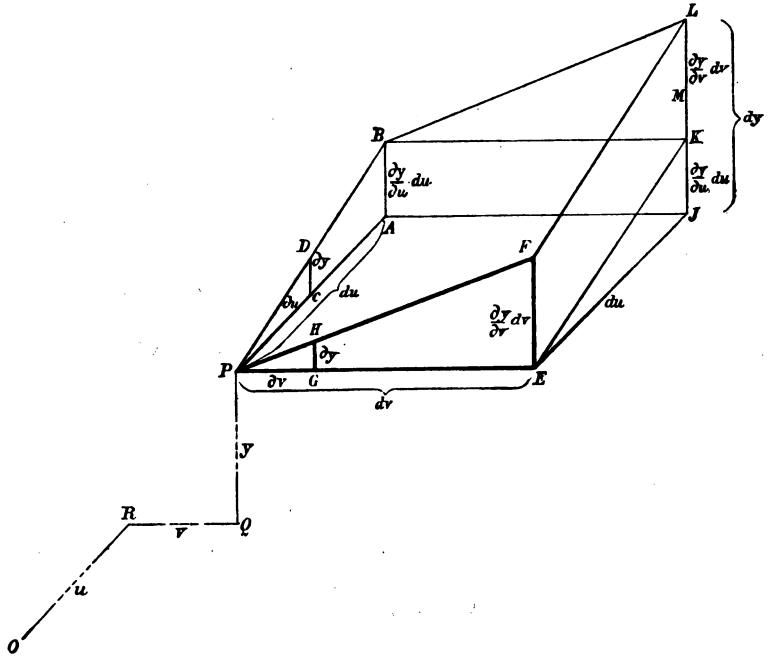
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv,$$

wo $\frac{\partial y}{\partial u}\,du$ den Zuwachs von y bei unverändertem v, $\frac{\partial y}{\partial v}\,dv$ den Zuwachs von y bei unverändertem u bedeutet.

Digitized by Google

Beweis. In der räumlich zu denkenden Figur habe der Punkt P von der Ebene ORQ den Abstand y, Q von R den seitlichen Abstand v, R von O den senkrecht zur Ebene RQP nach vorn gerichteten Abstand u. u, v, y sind so groß zu denken, daß PE und die übrigen Strecken des schief abgeschnittenen rechteckigen geraden Parallelepipeds (Kastens) gegen sie unendlich klein sind.

Wenn OR um $PA = du$ wächst, so wächst QP um AB; wächst RQ um $PE = dv$, so wächst QP um EF. Wächst nun gleichzeitig u um du und v um dv, so wächst QP um $AB + EF = JK + KL$. Um AB zu bestimmen, bezeichnet man einen kleiner als PA angenommenen Zuwachs von u mit $\partial u = PC$,



der zugehörige Zuwachs von y sei $\partial y = CD$, so ist nach dem Proportionalsatz $\frac{AB}{PA} = \frac{\partial y}{\partial u}$ oder $AB = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du$, ebenso ist $EF = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$, wobei die beiden ∂y aber verschiedene Größen sind, und die Quotienten $\frac{\partial y}{\partial u}$ sowie $\frac{\partial y}{\partial v}$ nur als eine nicht weiter zerlegbare Größe zu betrachten sind. Nimmt man jetzt an, daß die durch die Zuwächse du und dv eintretende Vergrößerung von y um dy schrittweise geschehen kann, so daß zuerst v unverändert bleibt, so gelangt der Funktionspunkt P nach B. Jetzt bleibe $u + du$ unveränderlich, v aber wachse um dv, so wird der Punkt von B nach L gelangen, da $\triangle BKL \cong \| PEF$ ist. Denselben Punkt erreicht man, wenn P erst nach F und von da parallel PB weiter wandert.

Jetzt ist $dy = JL = JK + KL = AB + EF = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$

Digitized by Google

Anmerkung 1. Der Quotient $\frac{\partial y}{\partial u}$ gibt das Maß der Vergrößerung von y an, wenn u sich um du ändert, während v konstant bleibt. Er wird durch Differentiation von y nach u gewonnen, indem man v wie eine Konstante behandelt. Das entsprechende gilt für $\frac{\partial y}{\partial v}$.

Es sei $y = u^2 \cdot v^3$, so ist $\frac{\partial y}{\partial u} = 2u \cdot v^3$, $\frac{\partial y}{\partial v} = u^2 \cdot 3v^2$.

Anmerkung 2. Sind u und v Funktionen von x, und ist

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad u' = \frac{du}{dx}; \quad v' = \frac{dv}{dx}; \text{ so ist}$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v'.$$

Aus dieser Gleichung können die Regeln 1 bis 6 ebenfalls abgeleitet werden;

z. B. $y = \frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = v^{-1}$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -u \cdot v^{-2}$,

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{u}{v^2}, \quad v' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Beispiel 1. $y = b^2u^2 - a^2v^2 - a^2b^2$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2b^2u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2a^2v, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dy = 2b^2 u du - 2a^2 v dv.$$

Beispiel 2. $y = 2u^2 + 5uv - 3v^2 + 7u - 6v + 9$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 4u + 5v + 7, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 5u - 6v - 6$$

$$dy = (4u + 5v + 7)\, du + (5u - 6v - 6)\, dv.$$

10. Ist $f(x, y)$ eine Funktion von x und y, so wird durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ die Größe y zu einer impliziten Funktion von x.

Man darf $f(x, y)$ zunächst wie y in (9) behandeln, es ist also

$$\boldsymbol{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.}$$

Ist $f(x, y)$ gleich Null oder gleich einer Konstanten, so ist $df = 0$,

also $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

oder nach Division durch dx

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

folglich $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}}$,

Digitized by Google

d. h. ist y implizit gegeben, so differenziert man die Funktion erst nach x, während man y als konstant behandelt, dann nach y, während man x als konstant behandelt. Der erste Differentialquotient durch den zweiten dividiert gibt die negative Ableitung von y nach x.

Beispiel 1. $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad df = \frac{2x}{a^2}\,dx + \frac{dy}{b^2}\,dy = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y}.$$

Beispiel 2. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3 + 6xy - 2y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 6x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2 + 2xy + y)}{3x^2 + 3y^2 + 6x - 2}.$$

---

2. Kapitel. Reihen.

§ 136.

Ableitungen einer Potenzreihe.

1. $y = a_0 + a_1x^2 + \cdots + a_nx^n$
$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1}$
$y'' = 2a_2 + 2\cdot3a_3x + 3\cdot4a_4x^2 + \cdots + (n-1)\cdot na_nx^{n-2}$
$y''' = 3!\,a_3 + 2\cdot3\cdot4a_4x + 3\cdot4\cdot5a_4x^2 + \cdots +$
$(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}$
. . . .
$y^{(n)} = n!\,a_n.$

Beweis. Aus $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
folgt $y + \triangle y = a_0 + a_1(x + \triangle x) + a_2(x + \triangle x)^2 + \cdots + a_n(x + \triangle x)^n$
$= a_0 + a_1x + a_1\triangle x + a_2x^2 + 2a_2x\triangle x + a_2(\triangle x)^2 + \cdots$
$+ a_nx^n + n\cdot a_nx^{n-1}\triangle x + \cdots$
$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
$+ \triangle x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1})$
$+ (\triangle x)^2(a_2 + 3a_3x + \cdots + \binom{n}{2}a_nx^{n-2}) + \cdots$

Die Glieder mit $(\triangle x)^2$ fallen beim Übergang zu dx^2 fort, also
$y + dy = a_0 + a_1x + \cdots + a^nx^n + dx(a_1 + 2a_2x + \cdots na_nx^{n-1})$
$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + n\cdot a_nx^{n-1}.$

Die erste Ableitung einer Potenzreihe ist also gleich der Summe der Ableitungen ihrer einzelnen Glieder.

Digitized by Google

Da die erste Ableitung wieder eine Potenzreihe ist, kann man von ihr in gleicher Weise eine Ableitung bilden und gelangt so zur zweiten Ableitung der ursprünglichen Potenzreihe.

2. Ist $y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$
$z = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$,

so ist y eine mittelbare algebraische Funktion von x. Wäre x wieder eine algebraische Funktion, z. B. von t, so wäre y auch eine algebraische Funktion von t und so fort.

Da $\frac{dy}{dz} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$

und $\frac{dz}{dx} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots + m b_m x^{m-1}$,

ist $\frac{dy}{dx} = \Big[a_1 + 2a_2 (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) + \cdots$

$+ n a_n (b_0 + b_1 x + \cdots)^{n-1}\Big] \cdot \Big[b_1 + \cdots + m b_m x^{n-1}\Big]$,

z. B. $y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, $z = b_0 + b_1 x$

$\frac{dy}{dz} = a_1 + 2a_2 z \qquad \frac{dz}{dx} = b_1$

$\frac{dy}{dx} = \Big[a_1 + 2a_2 (b_0 + b_1 x)\Big] b_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 2a_2 b_1^2 x.$

3. Ist $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$
eine unendliche Potenzreihe, so darf sie der Differentiation nur unterworfen werden, wenn bzw. solange sie eine endliche Summe hat. Man nennt sie in diesem Fall konvergent, im andern Fall divergent.

Im folgenden Paragraphen werden einige Kriterien für Konvergenz und Divergenz angegeben werden.

4. Stellen zwei konvergente Potenzreihen für jeden Wert des Arguments dieselbe Funktion dar, so sind die entsprechenden Koeffizienten gleich.

Beweis. Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$
und $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$,
so ist $0 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \cdots$,
für $x = 0$ ist $0 = a_0 - b_0$, also $b_0 = a_0$.

Differenziert man, so ist $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots$
$f'(x) = b_1 + 2b_1 x + \cdots$
$0 = a_1 - b_1 + 2(a_2 - b_2) x + \cdots$,
für $x = 0$ ist $0 = a_1 - b_1$, also $b_1 = a_1$.

Digitized by Google

5. Die Koeffizienten einer differenzierbaren Potenzreihe lassen sich durch Werte der Ableitungen der Funktion für bestimmte Argumente darstellen.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \\ f''(x) &= 2!\,a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + 3\cdot 4 a_4 x^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 3!\,a_3 + 2\cdot 3\cdot 4 a_4 x + 3\cdot 4\cdot 5 a_5 x^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}x = n!\cdot a_n + \frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2 + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

Ist die Reihe und ihre Ableitungen für $x = 0$ konvergent, so ist

$$a_0 = f(0),\quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \qquad a_3 = \frac{f'''}{3!}\cdots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots.$$

Mac Laurinsche Reihe 1742.

Ist eine Funktion und ihre sämtlichen Ableitungen für den Wert 0 des Arguments endlich, so läßt sie sich in eine Mac Laurinsche Reihe entwickeln.

6. Taylorsche Reihe 1715.

Ist eine Funktion und ihre sämtlichen Ableitungen für den Wert h des Arguments endlich, so läßt sie sich in eine Taylorsche Reihe entwickeln, und es ist

$$f(x+h) = f(h) + \frac{f'(h)}{1!}x + \frac{f''(h)}{2!}x^2 + \frac{f'''(h)}{3!}x^3 + \cdots$$

Beweis (zu 6). Es sei

$$\begin{aligned} f(x+h) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ f'(x+h) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \\ f''(x+h) &= 2!\,a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + 3\cdot 4 a_4 x^2 + \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man

$$a_0 = f(h),\quad a_1 = f'(h),\quad a_2 = \frac{f''(h)}{2!},\quad a_3 = \frac{f'''(h)}{3!}\cdots$$

folglich

$$f(x+h) = f(h) + f'(h)\cdot\frac{x}{1!} + f''(h)\cdot\frac{x^2}{2!} + f'''(h)\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

7. Ist eine beliebige Funktion dadurch gegeben, daß für bestimmte Werte des Arguments die entsprechenden Werte der Funktion bekannt sind, so kann man versuchen, sie in eine Potenzreihe zu entwickeln.

Da man aus n zusammengehörigen Werten n Koeffizienten bestimmen kann, so wird es im allgemeinen nur möglich sein, endliche Potenzreihen

Digitized by Google

zu bestimmen. Ist die Funktion aber periodisch, d. h. kehrt für einen bestimmten gleichbleibenden Zuwachs des Arguments derselbe Funktionswert wieder, so kann man auch unendliche Reihen bestimmen.

Beispiel 1. Es sei festgestellt, daß auf einer schiefen Ebene eine Kugel nach 1, 2, 3, 4 Sekunden Wege von 5, 20, 45, 80 cm zurückgelegt habe. Wie hängt der Weg von der Zeit ab?

Der Weg sei y cm, die Zeit x Sekunden. Von der Potenzreihe können nur 4 Koeffizienten berechnet werden, man setzt also

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ 5 &= a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 \\ 20 &= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 \\ 45 &= a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 \\ 80 &= a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 \end{aligned}$$

Das sind 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$.

Zur Lösung verwendet man Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} \cdot a_0 = \begin{vmatrix} 5 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 20 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 45 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 80 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

Die erste Staffel enthält den Faktor 5, hebt man diesen heraus, so stimmt die erste Staffel mit der dritten überein, die Determinante rechts ist 0, also $a_0 = 0$, dasselbe tritt bei a_1 und a_3 ein; für a_2 erhält man rechts dieselbe Determinante wie links, nur mit dem Faktor 5, also ist $a_2 = 5$, folglich $y = 5x^2$.

Beispiel 2. Es sei festgestellt, daß die durchschnittliche Lebensdauer eines 20jährigen noch $41\frac{2}{3}$, eines 30jährigen 35, eines 40jährigen $28\frac{1}{3}$ Jahre beträgt. Wie hängt die gesamte Lebensdauer vom Alter ab?

Die Lebensdauer sei y, das Alter x. Der 20jährige wird $61\frac{2}{3}$, der 30jährige 65, der 40jährige $68\frac{1}{3}$ Jahre alt.

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ 61\tfrac{2}{3} &= a_0 + a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 20^2 \\ 65 &= a_0 + a_1 \cdot 30 + a_2 \cdot 30^2 \\ 68\tfrac{1}{3} &= a_0 + a_1 \cdot 40 + a_2 \cdot 40^2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \\ 1 & 40 & 1600 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 2000$$

$$2000 \cdot a_0 = 1000 \begin{vmatrix} 61\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 65 & 3 & 9 \\ 68\frac{1}{3} & 4 & 16 \end{vmatrix} = 1000 \cdot 110 \quad \therefore a_0 = 55$$

$$\begin{aligned} 6\tfrac{2}{3} &= a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 20^2 \\ 10 &= a_1 \cdot 30 + a_2 \cdot 30^2 \end{aligned}$$

$$6000 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} a_1 = 100 \begin{vmatrix} 6\frac{2}{3} & 4 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 2000 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3} \text{ und } a_2 = 0, \quad y = 55 + \frac{x}{3},$$

gültig zwischen 20 und 40 Jahren.

Digitized by Google

§ 137.

Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

1. Eine unendliche Potenzreihe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$$

heißt konvergent für einen bestimmten Bereich, wenn für alle Werte x, die der Bedingung $a < x < b$ genügen, y zwischen zwei angebbaren endlichen Summen, deren Unterschied beliebig klein gemacht werden kann, liegt. Andernfalls heißt die Reihe divergent.

2. Die fallende geometrische Reihe ist konvergent.

$$y = a(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{a}{1 - x}, \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn ihre Glieder von einem bestimmten Gliede an die Glieder einer fallenden geometrischen Reihe nicht übersteigen und keines der vorhergehenden Glieder unendlich groß wird.

4. Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Gliede ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehenden kleiner als 1 ist, und wenn auch der Grenzwert $\left[\frac{a_n x}{a_{n-1}}\right]_{n=\infty} < 1$ ist.

5. Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und die absoluten Beträge der Glieder sich unbeschränkt der Null nähern.

Für eine Reihe positiver Glieder genügt diese Bedingung nicht, z. B. ist die Reihe $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$ divergent, weil $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}}$, dies aber, da $\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ ist, für $n = \infty$ selbst ∞ wird.

Dagegen konvergiert: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

§ 138.

Die Binomialreihe.

1. Für ganze positive Exponenten ist der binomische Lehrsatz § 115 bewiesen. Die Binomialreihe mit ganzen positiven Exponenten dient zur Grundlage der ganzen Differentialrechnung. Mit ihrer Hilfe ließ sich aber nachweisen, daß die Gleichung $dx^n = nx^{n-1}dx$ auch für gebrochene und negative n gilt. Durch diesen Satz und die Taylorsche Reihe kann man die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes auch für negative und gebrochene Exponenten nachweisen.

Digitized by Google

2. Es sei $B(x) = x^n$, also $B(1+x) = (1+x)^n$. Nach Taylor ist

$$B(1+x) = B(1) + \frac{x}{1}B'(1) + \frac{x^2}{2!}B''(1) + \frac{x^3}{3!}B'''(1) + \cdots$$

Es ist aber $B(x) = x^n$, $B'(x) = nx^{n-1}$, $B''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$, also $B(1) = 1^n = 1$, $B'(1) = n \cdot 1^{n-1} = n$, $B''(1) = n \cdot (n-1) \cdots$,

$$B(1+x) = 1 + \frac{x}{1} \cdot n + \frac{x^2}{2!} n \cdot (n-1) + \frac{x^3}{3!} n\,(n-1)\,(n-2) \cdots$$

Folglich ist, wenn man $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2}$; $\frac{n \cdot (n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n}{3}$ setzt,

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} \cdot x^3 + \cdots$$

für jedes rationale positive oder negative n.

3. Während die Binomialreihe für ganze positive n endlich ist, wird sie für negative und gebrochene unendlich, da $\binom{n}{k}$ für ein negatives oder gebrochenes n nicht Null wird, auch wenn $k > n$ ist.

Z. B. $(1+x)^{-2} = 1 + \frac{-2}{1} \cdot x + \frac{-2}{1} \cdot \frac{-3}{2} \cdot x^2 +$

$$\frac{-2}{1} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-4}{3} x^3 + \cdots = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1/2}{1} \cdot x + \frac{1/2}{1} \cdot \frac{-1/2}{2} \cdot x^2 + \frac{1/2}{1} \cdot \frac{-1/2}{2} \cdot \frac{-3/2}{3} x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \cdots$$

4. Die Binomialreihe ist für $|x| < 1$ stets konvergent, für $x = +1$, wenn $n > -1$, für $x = -1$, wenn $n > 0$.

§ 139.

Die Exponentialreihe.

1. Aufgabe. Es wird die Potenzreihe gesucht, deren erste Ableitung ihr selbst gleich ist, und die für das Argument 0 den Wert 1 hat.

Lösung. Die Reihe heiße $E(x)$.

$$E(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$E'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

Digitized by Google

$$\text{Da} \quad E(0) = 1, \quad \text{ist } a_0 = 1, \quad a_1 = a_0 = 1$$

$$2a_2 = a_1 = 1, \quad \therefore a_2 = \frac{1}{2}, \quad 3a_3 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad \therefore a_3 = \frac{1}{3!}$$

$$\boldsymbol{E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

Die Reihe ist konvergent, weil $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k+1}$ bei hinreichend großen k kleiner als 1 ist und bei unbegrenzt wachsendem k sich immer mehr der Null nähert.

2. $$\boldsymbol{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}718281828459\cdots}$$

Die Reihe E(x) erhält für $x = 1$ einen bestimmten Wert, den man mit e bezeichnet.

Denselben Wert erhält man durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) +$$

$$\frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \cdots$$

Für $n = \infty$ werden die Brüche in den Klammern Null, also ist

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}.$$

3. $\boldsymbol{E(x) = e^x}$.

Beweis. $$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$= 1 + \frac{nx}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Für $n = \infty$ werden die Brüche in den Klammern Null, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ aber e, also ist

$$e^x = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}\right]^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}_{n=\infty} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Digitized by Google

Demnach ist $e^x = E(x)$, $E(x)$ muß alle Eigenschaften einer Potenz haben. Z. B. $E(u) \cdot E(v) = e^u \cdot e^v = e^{u+v} = E(u+v)$ usw. Insbesondere war $E(0) = 1$, und e^0 ist gleich 1.

4. $y = e^x$, $y' = e^x$, $de^x = e^x\,dx$.

Beweis. Nach 3 ist $e^x = E(x)$, nach 1 ist $E'(x) = E(x)$, d. h. die Ableitung ist gleich der Funktion, d. h. $\frac{de^x}{dx} = e^x$. Alle folgenden Ableitungen sind ebenfalls e^x, also $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$.

5. Unter der Voraussetzung 4 kann man e^x nach dem Mac Laurinschen Satz entwickeln:

$$E(x) = E(0) + \frac{x}{1}E'(0) + \frac{x^2}{2!}E''(0) + \frac{x^3}{3!}E'''(0) + \cdots$$

$$e^x = e^0 + \frac{x}{1}e^0 + \frac{x^2}{2!}\cdot e^0 + \frac{x^3}{3!}e^0 + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

§ 140.

Die natürlichen Logarithmen.

1. Aus $1000 = 10^3$ leitete man $\log 1000 = 3$ ab, so folgert man aus $y = e^x$ auch $ly = x$. Wie bei log die Basis 10, so wird bei l die Basis e stillschweigend vorausgesetzt. Man nennt die Logarithmen zur Basis e **natürliche Logarithmen**, wegen einiger Eigenschaften, die sich später zeigen werden. Da $a = e^{la}$, $b = e^{lb}$, $ab = e^{lab}$ usw., so gelten die Sätze (vgl. § 65)

$$l(ab) = la + lb,\quad l\frac{a}{b} = la - lb,\quad la^n = nla,\quad l\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}la.$$

2. Der Übergang vom dekadischen zum natürlichen System wird (vgl. § 66) durch Multiplikation mit 2,3 gemacht. Der Übergang vom natürlichen zum dekadischen System geschieht durch Multiplikation mit 0,4343.

Beweis. Es ist $a = 10^{\log a} = e^{la}$. Logarithmiert man nach 10, so ist

$$\log a \cdot \log 10 = la \cdot \log e,\ \text{d. h.}\ la = \frac{1}{\log e}\log a.$$

Logarithmiert man die Gleichung $10^{\log a} = e^{la}$ nach e, so erhält man

$$\log a \cdot l\,10 = la \cdot le,\ \text{d. h.}\ \log a = \frac{1}{l10}la.$$

Es ist $\log e = \frac{1}{l10} = 0{,}4343$ und $l\,10 = \frac{1}{\log e} = 2{,}302585$.

3. Das natürliche System hat dem dekadischen gegenüber den Nachteil, daß Zahlen, die mit denselben Ziffern geschrieben werden, nicht die gleiche Mantisse haben.

Digitized by Google

Für den praktischen Gebrauch werden daher die dekadischen Logarithmen immer vorzuziehen sein, obgleich die Berechnung der natürlichen Logarithmen die Grundlage für die Aufstellung auch der dekadischen Logarithmentafeln bildet.

4. $y = lx, \quad y' = \frac{1}{x}, \quad dlx = \frac{dx}{x}.$

Beweis 1. Aus $lx = y$ folgt $x = e^y$. Nun ist nach § 139, 4 unter Vertauschung von x und y

$$dx = de^y = e^y dy = x dy, \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Beweis 2. $y + \triangle y = l(x + \triangle x)$; y wird als lx herübergeschafft:

$$\triangle y = l(x + \triangle x) - lx, \text{ da } la - lb = l\frac{a}{b}:$$

$$\triangle y = l\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right); \text{ durch } \triangle x \text{ dividiert:}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x} l\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right).$$

Setzt man $\frac{\triangle x}{x} = \frac{1}{m}$, so ist $\frac{1}{\triangle x} = \frac{m}{x} = m \cdot \frac{1}{x}$. Da nun $\frac{1}{x} \cdot m \cdot la = \frac{1}{x} \cdot la^m$, ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{x} l\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Läßt man $\triangle x$ zu dx übergehen, so wird $m = \frac{x}{dx} = \omega$ unendlich groß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} l\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega.$$

$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ ist aber von e bei hinreichend kleinem dx beliebig wenig verschieden. $le = 1$, also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Legt man ein beliebiges Logarithmensystem zugrunde und setzt $y = \log x$, so führt der Beweis auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e, \text{ also } d(\log x) = \frac{\log e}{x} dx.$$

5. Nach 4 ist $l(x + dx) = y + dy = lx + \frac{dx}{x}$. Dies gilt auch annähernd für endliche Differenzen, also $l(x + \triangle x) \sim lx + \frac{\triangle x}{x}$. Nach 2 ist

Digitized by Google

$\log a = 0{,}43 \cdot la$. Also $\log(x + \triangle x) = 0{,}43 \cdot lx + 0{,}43 \frac{\triangle x}{x} = \log x + 0{,}43 \cdot \frac{\triangle x}{x}$. Ist $x = 1000$, $\triangle x = 1$, so ist $\log 1001 = \log 1000 + 0{,}43 \cdot \frac{1}{1000} = 3 + 0{,}00043$, $\log 1002 = \log 1001 + 0{,}4343 \frac{1}{1001} = 3{,}0004343 + 0{,}0004339$, $\therefore \log 1002 = 3{,}00087$. In ähnlicher Weise sind tatsächlich die ersten Logarithmentafeln berechnet worden.

6. $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

Beweis. Da $l(0)$ keinen endlichen Wert hat, ist die Mac Laurinsche Reihe nicht verwertbar. Dagegen erweist sich die Taylorsche als brauchbar.

$$l(1+x) = f(1) + \frac{x}{1} f'(1) + \frac{x^2}{2!} f''(1) + \frac{x^3}{3!} f'''(1) + \frac{x^4}{4!} f''''(1) + \cdots$$

$$f(x) = lx,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{2}{x^3},\ f''''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{x^4},$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = -1,\ f'''(1) = 2,\ f''''(1) = -2 \cdot 3,$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

7. $l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$

Beweis. Vertauscht man in der Reihe für $l(1+x)$ das x mit $-x$, so erhält man

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots,$$

da $l\frac{1+x}{1-x} = l(1+x) - l(1-x)$, ist obige Reihe von der für $l(1+x)$ zu subtrahieren, was zu dem gewünschten Ergebnis führt.

8. Die logarithmische Reihe ist für $|x| < 1$ konvergent. x muß also ein echter positiver oder negativer Bruch sein.

Beweis. $\frac{x^{2k+1}}{2k+1} : \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \frac{2k-1}{2k+1} \cdot x^2$.

Da der Bruch $\frac{2k-1}{2k+1}$ für wachsendes k sich der 1 nähert, muß x^2 ein echter Bruch sein, damit die Reihe unter einer geometrischen bleibt.

9. $l\,2 = 0{,}693147$.

Berechnung. Man setzte $x = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$,

$$l\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \cdots\right) = 0{,}69314718\cdots$$

Digitized by Google

Ebenso wird für $x = \frac{2}{3}$

$$l\,5 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \cdots\right) = 1{,}60943791.$$

Daraus ergibt sich

$$l\,10 = l\,2 + l\,5 = 2{,}30258509 \text{ und } \frac{1}{l\,10} = 0{,}4342944819,$$

das sind die Moduln für die Umrechnung der Logarithmensysteme.

10. $\boldsymbol{d\,l\,f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.}$

Beweis. Nach 4 ist $d\,lx = \frac{dx}{x}$, also auch $d\,lu = \frac{du}{u}$. Ist u eine Funktion von x, so ist $du = u'\,dx$, demnach $d\,lu = \frac{u'}{u}\,dx$. Ist f eine Funktion von x, so ist $d\,lf = \frac{f'}{f}\,dx$.

Nun war y eine Funktion von x, demnach ist $d\,ly = \frac{y'}{y}dx$. Aus $y = uv$ folgt $ly = lu + lv$ und $d\,ly = d\,lu + d\,lv$ oder $\frac{y'}{y}\,dx = \frac{u'}{u}\,dx + \frac{v'}{v}\,dx$, d. h. $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$. (Vgl. § 135, 5.)

Hierin liegt die Begründung des Namens logarithmische Differentiation.

Beispiel. (Dölp-Netto 66.)

$$y = \sqrt{\frac{x}{x^2 - a^2}} \qquad ly = \frac{1}{2}\,l\,x - \frac{1}{2}\,l\,(x^2 - a^2)$$

$$\frac{y'\,dx}{y} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{d\,(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x\,dx}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{x^2 - a^2 - 2x^2}{x\,(x^2 - a^2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2 + x^2}{x\,(x^2 - a^2)}$$

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{a^2 + x^2}{x\,(x^2 - a^2)}\sqrt{\frac{x}{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{2}\frac{(a^2 + x^2)\sqrt{x\,(x^2 - a^2)}}{x\,(x^2 - a^2)^2}.$$

§ 141.*

Die allgemeine Exponentialfunktion.

1. $\boldsymbol{a^x = 1 + \frac{x\cdot la}{1!} + \frac{(x\cdot la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \cdots}$

Beweis. Es ist $a = e^{la}$, also $a^x = (e^{la})^x = e^{x\,la}$.

Digitized by Google

2. $y = a^x, \quad y' = a^x \cdot la, \quad da^x = a^x \cdot la \cdot dx.$

Beweis. $a^x = e^{x la}$. Nun ist $de^z = e^z \cdot dz, \quad \frac{de^z}{dx} = e^z \cdot \frac{dz}{dx}$. Hier ist $z = x \cdot la$, also $\frac{dz}{dx} = la$, $de^{x la} = e^{x la} \cdot d(x \cdot la) = e^{x la} \cdot la \cdot dx$.

3. $de^{-x} = -e^{-x}\,dx, \quad \frac{d^2 e^{-x}}{dx^2} = e^{-x}.$

Beweis.
$$f(x) = e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$f'(x) = \quad -1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$f''(x) = \quad 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Die Funktion, welche ihrer zweiten Ableitung gleich ist und für das Argument 0 den Wert 1 hat, ist also e^{-x}. Ihre Ableitung ist $-e^{-x}$.

4. $$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$
$$= C(x) + i \cdot S(x).$$

Erklärung. Imaginäre Exponenten waren bisher stets ausgeschlossen (vgl. § 61). Wir definieren nun nach dem Permanenzgesetz der Operationen (§ 21) die Potenz e^{ix} durch die Reihe für e^x, indem wir ix für x einsetzen.

Beweis.
$$f(x) = e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + i\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$
$$f'(x) = ie^{ix} = \quad -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + i\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)$$

Setzt man
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = C(x)$$
$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = S(x),$$

so sind durch die Reihen zwei Funktionen definiert, von denen sich außer der Konvergenz nach § 137, 5 folgende Eigenschaften unmittelbar ergeben:

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0, \quad C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x).$$

Digitized by Google

5. $d\,e^{-ix} = C(x) - i\,S(x)$. $C^2(x) + S^2(x) = 1$.

Beweis. $e^{-ix} = 1 + \frac{-ix}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \dots$

$= 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i\frac{x^5}{5!} - \dots$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$

$= C(x) - i\,S(x)$

$[C(x) + i\,S(x)]\,[C(x) - i\,S(x)] = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$, $C^2(x) + S^2(x) = 1$.
$C(x)$ und $S(x)$ sind also echte Brüche mit den Grenzwerten $+1$ und -1.

6. $e^{ix} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

Beweis. Nach § 60 läßt sich jede komplexe Zahl $a + ib$ durch Modul und Richtungsfaktor ausdrücken. Es ist

$$a + bi = \varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi), \text{ wo } \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Potenzen mit imaginären Exponenten sind in Nr. 4 durch die Reihe für e^{ix} definiert worden und erschienen als komplexe Zahlen. e^{ix} und e^{-ix} sind konjugiert komplex, da sie sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden, wie auch die obige Berechnung von e^{-ix} bestätigte. Man darf also setzen $e^{ix} = a + bi = \varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; $e^{-ix} = a - bi = \varrho\,(\cos\varphi - i \sin\varphi)$ $e^{ix} \cdot e^{-ix} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2 = \varrho^2$; $e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix - ix} = e^0 = 1$.
Der Modul von e^{ix} ist demnach 1 $\therefore$ $e^{ix} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. φ ist ein Winkel, x eine unbenannte Zahl.

7. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Beweis. Nach 4 ist $e^{ix} = C(x) + i\,S(x)$, nach 6 ist $e^{ix} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Komplexe Zahlen sind nur gleich, wenn ihre reellen und ihre imaginären Teile einzeln gleich sind, demnach ist

$C(x) = \cos\varphi$ $\qquad$ $S(x) = \sin\varphi$

$\cos\varphi = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ $\qquad$ $\sin\varphi = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

Der Kosinus und der Sinus eines Winkels lassen sich also durch eine Reihe ausdrücken. x hängt von der Größe des Winkels φ ab und ist derselben proportional; denn es ist

$$e^{ikx} = (e^{ix})^k = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$$

nach dem Moivreschen Lehrsatz, also auch

$\cos k\varphi = 1 - \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^4}{4!} - \dots$ $\qquad$ $\sin k\varphi = \frac{kx}{1!} - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \dots$

Digitized by Google

Demnach muß, wenn φ in irgendeinem Maße gemessen die Maßzahl α ergibt, $x = \lambda\alpha$ sein, wobei λ noch näher zu bestimmen ist.

In der Trigonometrie gibt man die Größe des Winkels φ in Grad an, d. h. in 360^{teln} eines Vollwinkels, bzw. in 90^{teln} eines Rechten. Diese Maßeinheit ist willkürlich, man kann den rechten Winkel auch in 100 gleiche Teile teilen und diese Grad nennen. Ein absolutes Maß des Winkels muß auf die Längeneinheit begründet sein. Beschreibt man um den Scheitel einen Kreis mit dem Radius 1, z. B. 1 cm, so ist die Länge des Kreisbogens zwischen den Schenkeln, da dieser proportional mit der Größe des Winkels wächst, das natürliche Maß des Winkels. Da der Radius sich auf dem Halbkreis π mal abtragen läßt, auf dem Viertelkreis $\pi/2$ mal, so ist das absolute Maß eines rechten Winkels $\pi/2$, eines Winkels von 1^0 also $\pi : 180$, eines Winkels von α^0 demnach $\alpha \cdot \pi : 180$.

x muß dem absoluten Maß des Winkels proportional und könnte ihm gleich sein. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe für $\cos\varphi$ für einen von Null verschiedenen Wert ein richtiges Ergebnis liefert, wenn man für x das absolute Winkelmaß einsetzt.

Es sei φ ein Winkel von 60^0. Wir setzen versuchsweise $x = 60\pi : 180 = \pi/3$, so ist die Reihe unter Beschränkung auf 4 Glieder und 4 Dezimalstellen

$$C(x) = 1 - \frac{(\pi/3)^2}{2!} + \frac{(\pi/3)^4}{4!} - \frac{(\pi/3)^6}{6!} +$$

$$= 1 - 0{,}5483 + 0{,}0501 - 0{,}0018 = 0{,}5,$$

$\cos 60^0$ ist gleich 0,5. Bei einem Winkel von 60^0 muß man also $x = \pi/3$ setzen, um den richtigen Wert des Kosinus zu erhalten. Es war $x = \lambda\alpha$, wenn α die Maßzahl des Winkels ist. Mißt man den Winkel nach Grad, so ist $\lambda = \pi : 180$; mißt man den Winkel mit dem Bogen des Einheitskreises, so ist $\lambda = 1$, also $x = \varphi$. Man verwendet deshalb in der Analysis ausschließlich das Bogenmaß des Winkels und versteht unter dem Winkel x einen solchen, auf dessen zugehörigem Bogen sich der Radius x mal abtragen läßt. In diesem Sinne schreibt man

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

8. Die sämtlichen goniometrischen Formeln lassen sich auch unmittelbar aus den Reihen $C(x)$ und $S(x)$ ableiten, z. B.

$$\left[C(x) + i\,S(x)\right]^2 = C^2(x) - S^2(x) + 2\,C(x) \cdot S(x),$$

$$\left[C(x) + i\,S(x)\right]^2 = (e^{ix})^2 = e^{i \cdot 2x} = C(2x) + i\,S(2x),$$

$$\therefore\ C(2x) = C^2(x) - S^2(x), \quad S(2x) = 2\,S(x) \cdot Cx;$$

d. i. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

Digitized by Google

9. $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Beweis. Nach 6 ist $e^{ix} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Mißt man φ im Bogenmaß, so ist

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man die obigen Gleichungen.

Anmerkung. Wenn die Anomalie φ im Bogenmaß gegeben ist, so setzt man auch $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Jede komplexe Zahl hat dann den Richtungsfaktor $e^{i\varphi}$. Es ist $a + bi = \varrho\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\cdot e^{i\varphi}$.

10. $$e^x = e^{x+2k\pi i}.$$

Die Exponentialfunktion hat die Periode $2k\pi i$.

Beweis. Dem Winkel von 360^0 in Gradmaß entspricht ein Winkel von 2π im Bogenmaß; ferner ist $\cos 360^0 = 1$, $\sin 360^0 = 0$, also

$$1 = \cos 360^0 + i\cdot\sin 360^0 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = e^{2\pi i}, \quad 1^k = e^{2k\pi i},$$
$$e^x = e^x\cdot 1^k = e^x\cdot e^{2k\pi i} = e^{x+2k\pi i}.$$

Aus der Übereinstimmung von Potenz und Basis darf man deshalb nur so lange auf die Übereinstimmung der Exponenten schließen, als imaginäre Exponenten ausgeschlossen sind.

Auch e^{ix} ist periodisch, mit der Periode $2k\pi$, denn

$$e^{ix} = e^{ix}\cdot 1^k = e^{xi}\cdot e^{2k\pi i} = e^{i(x+2k\pi)}.$$

Die komplexen Zahlen lassen sich also folgendermaßen darstellen:

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho(\cos x + i\sin x) = \varrho\, e^{ix} = \varrho\, e^{i(x+2k\pi)}.$$

11. **Leibnizsche Reihe.** $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Beweis. Nach § 140, 6 ist

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right).$$

Nun ist $e^{ix} : e^{-ix} = e^{2ix}$, also

$$\frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x} = e^{2ix}.$$

Setzt man in der logarithmischen Reihe für x jetzt $i\operatorname{tg} x$ und berücksichtigt, daß $i^3 = -i$, $i^5 = i$ usw., so ist

$$l\frac{1 + i\operatorname{tg} x}{1 - i\operatorname{tg} x} = 2\left(i\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}i\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}i\operatorname{tg}^5 x - \cdots\right) = le^{2ix} = 2ix,$$

demnach ist $$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \cdots$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$ wird $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$, also ist $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Diese Reihe konvergiert aber außerordentlich langsam, so daß andere Reihen für π zur Berechnung geeigneter sind.

Digitized by Google

12. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$

Die Ableitung von cos x ist — sin x, die Ableitung von sin x ist cos x.

Beweis. Die Reihen für cos x und sin x dürfen differenziert werden, da sie konvergent sind.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \cos x$$

$$f'(x) = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots = -\sin x$$

$$f''(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots = -\cos x$$

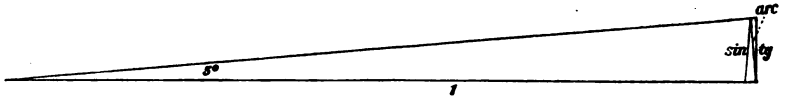
$$f'''(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x$$

$$f''''(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \cos x.$$

§ 142.

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen.

1. Arcus. Unter dem Arcus eines Zentriwinkels versteht man das Verhältnis seines Bogens zum Radius.



Gibt man dem Radius die Länge 1, so ist die Maßzahl des Bogens gleich dem Arcus. Der Arcus ist stets eine unbenannte Zahl. Aus der Planimetrie ist die Proportion $\alpha : 360 = b : 2\pi r$ bekannt, wo α den Winkel in Gradmaß, b den zugehörigen Bogen, r den Radius bezeichnet. Demnach ist

$$\operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{b}{r} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180},$$

$$\text{also } \operatorname{arc} 2\alpha^0 = \frac{2b}{r} = 2 \cdot \frac{\alpha\pi}{180} = 2 \operatorname{arc} \alpha^0, \quad \operatorname{arc} k\alpha^0 = k \operatorname{arc} \alpha^0.$$

Wichtig sind die Werte

$$\operatorname{arc} 0^0 = 0, \quad \operatorname{arc} 30^0 = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc} 45^0 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc} 60^0 = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc} 90^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc} 180^0 = \pi, \quad \operatorname{arc} 360^0 = 2\pi,$$

$$\operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453, \quad \operatorname{arc} 57{,}3^0 = 1.$$

Digitized by Google

Nimmt man als Längeneinheit 1 dm, so ist aus der Figur ersichtlich, daß $\sin 5^0 < \text{arc } 5^0 < \text{tg } 5^0$. Der Beweis liegt darin, daß der Umfang des Sehnen-36ecks kleiner, der des Tangenten-36ecks größer als der Kreisumfang ist. Je kleiner der Winkel ist, desto weniger unterscheiden sich sin und tg vom arc, und unbedenklich setzt man bei fünfstelliger Genauigkeit

$$\sin 10' = \text{arc } 10' = \text{tg } 10'.$$

Nimmt man einen unendlich kleinen Winkel δ^0, so ist

$$\sin \delta^0 = \text{tg } \delta^0 = \text{arc } \delta^0 = \delta \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Aus der Formel $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ folgt

$$\cos \delta^0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta^0}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2.$$

2. Unter $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg } x$ versteht man die entsprechenden Funktionen eines Winkels, dessen Arcus gleich x ist.

Man schreibt $\sin 2\pi$ für $\sin 360^0$, $\sin \frac{\pi}{2}$ für $\sin 90^0$, $\sin 0{,}017$ für $\sin 1^0$, $\sin 0{,}017\,\alpha$ für $\sin \alpha^0$, $\sin 1$ für $\sin 57{,}3^0$. Eine Verwechselung ist ausgeschlossen, da der Arcus eine unbenannte Zahl ist. In dem Ausdruck $\sin \varphi$ ist φ ein Winkel; dieser kann in Gradmaß angegeben sein, z. B. $\varphi = 75^0$, er kann aber auch in Bogenmaß gegeben sein, z. B. $\varphi = 1{,}309$, was denselben Winkel bedeutet, da $\text{arc } 75^0 = 1{,}309$ ist.

Die Bezeichnung der Funktionen nach dem Arcus hat den Vorzug, daß man ein unbenanntes Argument x hat. Ein Zuwachs desselben ist gleich einem Zuwachs des Bogens β im Einheitskreis, also $dx = d\beta$. dx ist dann selbst ein Arcus, und zwar ein unendlich kleiner, zu dem ein unendlich kleiner Winkel, z. B. von δ^0, gehört. Nun war nach Nr. 1 $\sin \delta^0 = \text{tg } \delta^0 = \text{arc } \delta^0 = \delta \cdot \frac{\pi}{180}$.

Auch für unendlich kleine Winkel gilt die Proportion $\alpha : 180 = b : \pi$, also $\delta : 180 = dx : \pi$ oder $\delta \cdot \frac{\pi}{180} = dx$. Für $\sin \delta^0$ darf man $\sin dx$ schreiben, demnach ist

$$\sin dx = dx, \qquad \text{tg } dx = dx.$$

Es war $\cos \delta^0 = 1 - \frac{1}{2}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}(dx)^2$.

Das Quadrat eines Differentials darf neben der endlichen Größe vernachlässigt werden, also ist $\cos dx = 1$.

Digitized by Google

3. $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x.$

Beweis. $y = \sin x$

$y + dy = \sin(x + dx)$

$= \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx;\ \cos dx = 1,\ \sin dx = dx$

$= \sin x + \cos x \cdot dx$

$dy = \cos x \cdot dx$

4. $\dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$

Beweis. $y = \cos x$

$y + dy = \cos(x + dx)$

$= \cos x \cdot \cos dx - \sin x \cdot \sin dx$

$= \cos x - \sin x \cdot dx$

$dy = -\sin x \cdot dx.$

5. $\dfrac{d\,tg\,x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$

Beweis. $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}.$

Wendet man die logarithmische Differentiation an, so ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sin' x}{\sin x} - \frac{\cos' x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x$$

$$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. $\dfrac{d\,cotg\,x}{dx} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}.$

Beweis. $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$y' = -1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. Die weiteren Differentiale von $\sin x$ und $\cos x$ kehren periodisch wieder. Es ist

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x,$$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x,$$

also $\dfrac{d^4 \sin x}{dx^4} = \sin x$, ebenso ist $\dfrac{d^4 \cos x}{dx^4} = \cos x.$

Digitized by Google

Bezeichnet man die Ableitungen mit Strichen, so ist

$$\cos x = \sin'(x) = -\cos''(x) = -\sin'''(x) = \cos''''(x),$$
$$\sin x = -\cos'(x) = -\sin''(x) = \cos'''(x) = \sin''''(x).$$

Also da $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ ist

$$1 = \sin'(0) = -\cos''(0) = -\sin'''(0) = \cos''''(0),$$
$$0 = -\cos'(0) = -\sin''(0) = \cos'''(0) = \sin''''(0).$$

8. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Beweis. Nach der Maclaurinschen Reihe ist

$$\cos x = \cos 0 + \frac{x}{1!}\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos''(0) + \frac{x^3}{3!}\cos'''(0) + \cdots$$

Nach 7 ist $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$,
$\cos''(0) = -1$, $\cos'''(0) = 0$.

Alle Glieder mit ungeradem Exponenten fallen fort, die mit geradem erhalten abwechselnd positive und negative Vorzeichen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Die Reihe ist konvergent und stimmt mit der in § 141 entwickelten überein.

9. $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Beweis. Nach dem Maclaurinschen Satz ist

$$\sin x = \sin(0) + \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin''(0) + \frac{x^3}{3!}\sin'''(0) + \cdots$$

Nun ist $\sin 0 = 0 = \sin''(0)$, alle geraden Potenzen fallen fort, die ungeraden sind abwechselnd positiv und negativ.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Die Reihe stimmt mit der für $\sin x$ im § 141 überein und ist konvergent.

---

3. Kapitel. Maxima und Minima.

§ 143.

Anwendungen der Differentialrechnung.

1. Maximum. $\frac{dy}{dx} = 0$, vorher positiv, nachher negativ.

Wenn eine Funktion y bei wachsendem x selbst wächst, so wird einem positiven Zuwachs dx des Arguments ein positiver Zuwachs dy der Funktion entsprechen. Nähert sich die Funktion einem Maximum, so wird der Zuwachs

Digitized by Google

allmählich kleiner werden, und in dem Augenblick, wo die Funktion ihren höchsten Wert erreicht hat, wird der Zuwachs selbst Null werden. Danach tritt ein Abnehmen der Funktion ein, also dy wird negativ. Statt dy kann man auch die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ betrachten. Ein Maximum tritt ein, wenn die erste Ableitung Null wird, nachdem sie vorher positiv war, vorausgesetzt, daß sie nachher negativ wird (vgl. § 144, 1 und 3).

2. Minimum. $\frac{dy}{dx} = 0$, vorher negativ, nachher positiv.

Ein Minimum tritt ein, wenn die Funktion bis zu einer gewissen Grenze abnimmt, dann aber wieder steigt, wenn also dy erst negativ, dann Null, dann positiv wird. Bei $\frac{dy}{dx} = 0$ tritt das Minimum ein (vgl. § 144, 1).

3. Extreme Werte. $y' = 0$, $y'' < 0$ Maximum, $y'' > 0$ Minimum.

$\frac{dy}{dx} = 0$ kann entweder ein Maximum oder ein Minimum bedeuten. Betrachtet man y' als eine neue Funktion, so nimmt sie in der Umgebung eines Maximums ab, eines Minimums zu. Ihre Ableitung, d. h. die zweite Ableitung der ursprünglichen Funktion, muß also bei einem Maximum negativ, bei einem Minimum positiv sein (vgl. § 144, 1 und 2).

Da die Bestimmung der 2. Ableitung oft umständlich ist, kann man die Entscheidung darüber, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, durch eine Betrachtung über den Verlauf der Funktion treffen. Ist die Funktion in dem Bereich stets positiv und für die Grenzwerte unendlich, und liegt in dem Bereich nur ein extremer Wert, so ist dieser ein Minimum, vorausgesetzt, daß die Funktion stetig ist, d. h. f'(x) nicht ∞ wird. Sind die Grenzwerte unter denselben Bedingungen Null, so ist der extreme Wert ein Maximum (vgl. § 144, 4 und 5).

4. Wendepunkt. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. $\frac{d^3y}{dx^3} \gtrless 0$.

Ist die 2. Ableitung Null, so hat die erste Ableitung an dieser Stelle ein Maximum oder ein Minimum. Ist die 3. Ableitung von Null verschieden, z. B. positiv, so hat die erste Ableitung ein Minimum. Die erste Ableitung gibt die Richtung der Tangente der Kurve an. Der Winkel der Tangente mit der X-Achse wird vor der betreffenden Stelle kleiner, bleibt an ihr ein unendlich kleines Stück konstant, so daß das Kurvenstück gerade erscheint, danach wächst der Winkel wieder. Die Kurve wendet sich dabei von der einen Seite der Tangente auf die andere; vorher kehrte sie ihre hohle Seite nach unten, nachher nach oben. Ein solcher Punkt heißt Wendepunkt (vgl. § 144, 1).

Ist die 3. Ableitung negativ, so ist die Reihenfolge umgekehrt. Die hohle Seite ist erst nach oben, dann nach unten gekehrt. Dazwischen liegt ein Wendepunkt.

Ist die dritte Ableitung Null, die vierte von Null verschieden, so hat die Kurve einen extremen Wert und so fort.

Digitized by Google

5. Unbestimmte Werte. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Nimmt der Quotient zweier Funktionen für das Argument a den Wert 0 an, so entwickelt man die Funktionen nach dem Taylorschen Satz. Es sei $f(a) = 0$ und $g(a) = 0$. Es ist

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''a + \dots$$

$$= x\left(f'(a) + \frac{x}{2!} f''(a) + \frac{x^2}{3!} f'''(a) + \dots\right)$$

$$g(a+x) = g(a) + \frac{x}{1!} g'(a) + \frac{x^2}{2!} g''(a) + \dots$$

$$= x\left(g'(a) + \frac{x}{2} g''(a) + \frac{x^2}{3!} g'''(a) + \dots\right)$$

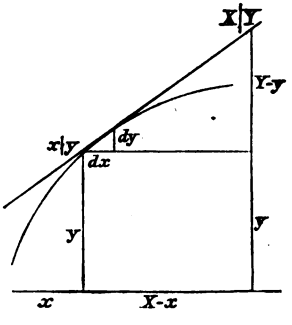
$$\text{also} \quad \frac{f(a+x)}{g(a+x)} = \frac{f'(a) + \frac{x}{2} f''(a) + \dots}{g'(a) + \frac{x}{2} g''(a) + \dots}$$

Setzt man jetzt $x = 0$, so erhält man

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Hat auch dieser Quotient die Form $\frac{0}{0}$, so wendet man das Verfahren noch einmal an (vgl. § 144, 6).

Auch der Quotient $\frac{\infty}{\infty}$ läßt sich auf diese Weise öfter ermitteln und ebenso durch geeignete Umformungen die andern unbestimmten Ausdrücke $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.



6. Tangente an eine Kurve.

Ist x|y ein Punkt einer Kurve, X|Y ein Punkt der Tangente an die Kurve im Punkte x|y, und nimmt man an, daß die Tangente ein unendlich kleines Stück mit der Kurve gemein hat, d. h. außer durch den Punkt x|y auch durch den Punkt $x + dx | y + dy$ geht, so besteht die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y - y}{X - x}.$$

Verwendung hat diese Formel § 144, Beispiel 1 und 7 gefunden. (Vgl. auch § 133, 5.)

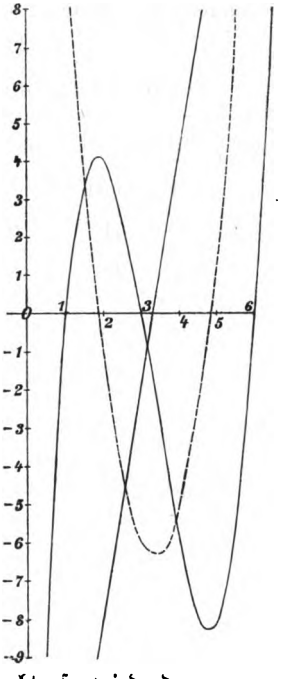
Digitized by Google

§ 144.

Beispiele für Anwendungen der Differentialrechnung.

Beispiel 1. Es sei $y = x^3 - 10x^2 + 27x - 18$,
so ist $y' = 3x^2 - 20x + 27$ und $y'' = 6x - 20$.

x	0	1	2	3	4	5	6	$6\frac{1}{2}$
y	−18	0	+4	0	−6	−8	0	+8
y′	27	10	−1	−6	−5	2	15	
y″	−20	−14	−8	−2	+4	+10	+16	



Die Schnittpunkte der Kurve 3. Ordnung mit der Abszissenachse haben die Abszissen 1, 3, 6. Die Schnittpunkte der Parabel mit der Abszissenachse liegen zwischen 1 und 2 und zwischen 4 und 5. Aus der quadratischen Gleichung $3x^2 - 20x + 27 = 0$ findet man $x_1 = 1{,}88$, $x_2 = 4{,}8$. Bei diesen Abszissen hat die Kurve 3. Ordnung einen extremen Wert. Da bei der Abszisse 1,88 y″ negativ, bei der Abszisse 4,8 positiv ist, liegt bei der ersteren ein Maximum, bei der letzteren ein Minimum, wie auch daraus ersichtlich ist, daß y′ bei 1,9 aus dem positiven ins negative, bei 4,8 aus dem negativen ins positive übergeht. Die Gerade, welche y″ darstellt, schneidet die x-Achse bei $x = \frac{10}{3}$, hier hat die Kurve 3. Ordnung einen Wendepunkt. Es ist demnach

Max 1,88|4,1; Inflex 3,3|−1,65;
Min 4,8|−8,4.

Ist die Tangente z. B. im Punkte 4|−6 gesucht, so wird, da $y' = -5$ für $x = 4$ ist, $\frac{Y+6}{X-4} = -5$ oder $Y = -5X + 14$.

Beispiel 2. Die Gleichung der Wurflinie eines Körpers, welcher unter einem Winkel α gegen die Horizontalebene mit einer Anfangsgeschwindigkeit c geworfen wird, lautet, wenn g die Beschleunigung durch die Schwere ausdrückt,

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2c^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$y' = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x}{c^2 \cos^2\alpha}$$

$$y'' = -\frac{g}{c^2 \cos^2\alpha}.$$

Die Kurve hat, da y″ negativ ist, ein Maximum für $y' = 0$.

$$\operatorname{tg}\alpha = g x : (c^2 \cos^2\alpha) \text{ gibt } x_m = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}.$$

Die größte Steighöhe ist $y_m = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Digitized by Google

Beispiel 3. Der Mantel M eines geraden Kreiskegels ist gegeben. Wie verhält sich der Radius r des Grundkreises zur Höhe h und zur Seitenlinie k, wenn das Volum ein Maximum ist?

Auflösung 1. Grundgleichungen: $M = \pi r k$, $3V = \pi r^2 h$, $r^2 = k^2 - h^2$. Differentialgleichungen: $dM = \pi r dk + \pi k dr$, $3dV = \pi r^2 dh + 2\pi r h dr$,

$$2r dr = 2k dk - 2h dh.$$

Da M konstant ist, ist $dM = 0$. Da V ein Maximum werden soll, ist $dV = 0$. Die drei Gleichungen gehen also nach Fortlassung gemeinschaftlicher Faktoren über in:

$$0 = r dk + k dr, \quad 0 = r dh + 2h dr, \quad r dr = k dk - h dh$$

$$\frac{dk}{dr} = -\frac{k}{r}, \quad \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r}, \quad r = k\frac{dk}{dr} - h\frac{dh}{dr}$$

$$\therefore r = -\frac{k^2}{r} + \frac{2h^2}{r} \quad \text{oder} \quad 2h^2 = r^2 + k^2.$$

Nun ist $h^2 = k^2 - r^2$, also $h^2 = 2r^2$, $k^2 = 3r^2$,

also $r : h : k = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Auflösung 2. Will man mit Differentialquotienten rechnen, so ist

$$M = \pi r k, \text{ also } k = \frac{M}{\pi r}, \quad h^2 = k^2 - r^2 = \frac{M^2}{\pi^2 r^2} - r^2$$

$$3V = \pi r^2 h, \quad 9V^2 = \pi^2 r^4 h^2 = M^2 r^2 - \pi^2 r^6.$$

Setzt man $y = 9V^2$, $r = x$, so ist

$$y = M^2 x^2 - \pi^2 x^6, \quad y' = 2M^2 x - 6\pi^2 x^5 = 2x(M^2 - 3\pi^2 x^4).$$

Da $x = r$ nicht 0 werden soll, was theoretisch ein Minimum ergäbe, muß für $y' = 0$, $3\pi^2 x^4 = M^2$ oder $x^2 = \frac{M}{\pi\sqrt{3}}$ sein. Dann ist $k^2 = \frac{M^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2}$

$$k^2 = \frac{M}{\pi}\sqrt{3} = \frac{M}{\pi} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad h^2 = \frac{M}{\pi}\sqrt{3} - \frac{M}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{M}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$r^2 : h^2 : k^2 = 1 : 2 : 3, \text{ also } r : h : k = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Beispiel 4. Zwei Punkte A und B haben von einer geraden Linie L die Entfernungen a und b, die Projektion von AB auf L sei $CD = c$; auf L den Punkt E zu bestimmen, für welchen die Summe der Verbindungslinien mit A und B ein Minimum ist.

Auflösung. Nimmt man die Linie L zur X-Achse, C zum Anfangspunkte der Abszissen, setzt also $CE = x$, $ED = c - x$, so ist:

$$f(x) = AE + EB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Digitized by Google

Setzt man $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $v = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$,

so ist $u' = (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$,

$$v' = (e^2 + (c-x)^2)^{-\frac{1}{2}}(x-c),$$

$$f'(x) = u' + v'$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2}, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{x^2}{(c-x)^2}, \quad x:(c-x) = a:b, \quad x = \frac{ac}{a+b}.$$

Da die Funktion positiv ist und für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ unendlich wird, und der Wert von $f'(x)$ zeigt, daß die Funktion für jeden endlichen Wert von x stetig ist, so muß dem für x erhaltenen Werte ein Minimum entsprechen. Ist E der gesuchte Punkt, so folgt, da CE : ED = a : b ist, $\triangle ACE \sim \triangle BDE$, $\measuredangle AEC = BED$.

Der Weg AEB, welchen ein von A ausgehender, durch den auf der Ebene AEB senkrechten Spiegel L zurückgeworfener Lichtstrahl nimmt, um von A nach B zu gelangen, ist also der kürzeste der Wege, auf denen man unter Berührung des Spiegels von A nach B kommen kann.

Beispiel 5. Auf einer Horizontalebene befindet sich eine Kugel; man soll um dieselbe einen geraden Kegel beschreiben, dessen Mantel ein Minimum ist.

Auflösung. Bezeichnet man den Radius der Kugel mit r, den Halbmesser der Basis des geraden Kegels mit x, seine Höhe mit y, seine Seitenkante mit s, so ist

$$y = \sqrt{s^2 - x^2}, \quad (y-r):s = r:x, \quad \text{also } (y-r)x = sr, \quad y = \frac{r}{x}(s+x),$$

$$r(s+x) = x\sqrt{s^2-x^2}, \quad s = x \cdot \frac{x^2+r^2}{x^2-r^2},$$

mithin der Mantel: $f(x) = \pi x^2 \cdot \frac{x^2+r^2}{x^2-r^2}$.

Logarithmiert man, so ist

$$lf(x) = l\pi + 2lx + l(x^2+r^2) - l(x^2-r^2),$$

differenziert man

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+r^2} - \frac{2x}{x^2-r^2}.$$

Da f(x) weder Null noch ∞ werden darf, wenn die Lösung Sinn haben soll, muß die rechte Seite mit $f'(x)$ verschwinden, also

$$1 + \frac{x^2}{x^2+r^2} = \frac{x^2}{x^2-r^2}, \quad x^4 - 2r^2x^2 - r^4 = 0,$$

$$x^2 = r^2(1+\sqrt{2}), \quad x = r\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Da für $x = r$ und für $x = \infty$ die Funktion f(x) unendlich wird, und f(x), wie man aus dem Werte von $f'(x)$ erkennt, für positive Werte $r < x < \infty$ stetig bleibt, so muß dem obigen Wert von x ein Minimum der Funktion entsprechen.

Digitized by Google

Beispiel 6. $\frac{x}{e^x - e^{-x}}$ nimmt für $x = 0$ den Wert $\frac{0}{0}$ an. Differenziert man Zähler und Nenner, so ist $dx = 1 \cdot dx$, $de^x = e^x dx$, $de^{-x} = -e^{-x} dx$, der Bruch geht also über in $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$, da $e^0 = 1$ ist, hat er den Wert $\frac{1}{2}$.

Also ist $$\left[\frac{x}{e^x - e^{-x}}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 7. Die Tangentengleichungen der Kegelschnitte sollen aufgestellt werden.

I. Scheitelgleichung der Parabel: $y^2 = 2px$.

Differentialgleichung: $2y\,dy = 2p\,dx$.

Richtung der Tangente: $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

Tangentengleichung: $\frac{Y - y}{X - x} = \frac{p}{y}$.

Ersetzt man y^2 durch $2px$, so erhält man

$$Yy = p(X + x).$$

II. Mittelpunktsgleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Differentialgleichung: $\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} = 0$.

Richtung der Tangente: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y}$.

Tangentengleichung: $\frac{Y - y}{X - x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Ersetzt man $a^2 y^2$ durch $a^2 b^2 - b^2 x^2$ und dividiert durch $a^2 b^2$, so ergibt sich

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

III. Mittelpunktsgleichung der Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tangentengleichung: $\frac{Y - y}{X - x} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

oder $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$.

Digitized by Google

Formelsammlung.

Erster Abschnitt. Die vier Spezies in absoluten Zahlen.

1. Kapitel. Addition und Subtraktion.

(1) $a + b = b + a$

(2*) $a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$

(3) $(a - b) + b = a$

(4) $(a + b) - b = a$

(5) $a + b - c = a - c + b$

(6) $a - b - c = a - c - b$

(7) $a - (b + c) = a - b - c$

(8) $a + (b - c) = a + b - c$

(9) $a - (b - c) = a - b + c$

(9**) $a - b = (a + m) - (b + m) = (a - m) - (b - m)$

2. Kapitel. Multiplikation und Division.

(10) $a + a + a \ldots (b\,\text{mal}) = ab$

(11) $ab = ba$

(12) $(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = (bc) \cdot a$

(13) $(a + b)c = ac + bc$

(14) $(a - b)c = ac - bc$

(15) $(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd$

(15*) $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$

(15**) $(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd$

(16) $(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd$

(17) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(18) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(19) $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

(20) $(a : b)b = a$

(21) $(ab) : b = a$

(22) $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots (b\,\text{mal}) = \frac{1}{b} \cdot b = 1$

(22*) $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots (a\,\text{mal}) = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$

(23) $a : b = \frac{a}{b}$

Digitized by Google

(24) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

(25) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

(26) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$

(27) $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$

(28) $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} \cdot c$

(29) $a : \frac{b}{c} = a : \frac{c}{b}$

(30) $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

(31) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(32) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

(33) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

(33*) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

Zweiter Abschnitt. Die vier Spezies in algebraischen Zahlen.

1. Kapitel. Null und Unendlich.

(34) $a - a = 0$

(35) $a + 0 = a, \quad a - 0 = a$

(36) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(37) $\frac{0}{a} = 0$

(38) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \lim \left(\frac{1}{n}\right)_{n=0} = \frac{1}{0} = \infty$

(39) $\lim \left(\frac{a}{n}\right)_{n=\infty} = \frac{a}{\infty} = 0, \quad \lim \left(\frac{a}{n}\right)_{n=0} = \frac{a}{0} = \infty$

(40) $\infty + a = \infty, \quad \infty - a = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty, \quad \infty : a = \infty$

(41) $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$ unbestimmt

Digitized by Google

2. Kapitel. Relative Zahlen.

Addition und Subtraktion.

(42) $\begin{cases} a + (+ b) = a + b \\ a + (- b) = a - b \end{cases}$

(43) $\begin{cases} (+ a) + (+ b) = + (a + b) \\ (- a) + (- b) = - (a + b) \end{cases}$

(44) $(+ a) + (- b) = + (a - b)$, wenn $a > b$,
$= - (b - a)$, wenn $a < b$,

(45) $a - b + c - d = a + (- b) + (+ c) + (- d)$

(46) $\begin{cases} (\pm a) - (+ b) = (\pm a) + (- b) \\ (\pm a) - (- b) = (\pm a) + (+ b) \end{cases}$

Multiplikation und Division.

(47) $(\pm b) \cdot a = a \cdot (\pm b) = \pm ab$

(48) $\begin{cases} (+ a) \cdot (+ b) = + ab \\ (- a) \cdot (- b) = + ab \end{cases}$

(49) $\begin{cases} (+ a) \cdot (- b) = - ab \\ (- a) \cdot (+ b) = - ab \end{cases}$

(50) $\begin{cases} (+ a) : (+ b) = + (a : b) \\ (- a) : (- b) = + (a : b) \end{cases}$

(51) $\begin{cases} (+ a) : (- b) = - (a : b) \\ (- a) : (+ b) = - (a : b) \end{cases}$

Dritter Abschnitt. Anwendungen der vier Spezies.

4. Kapitel. Proportionen.

(52) Aus $a : b = c : d$ folgt $a \cdot d = b \cdot c$

(53) $\begin{cases} (a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d \\ (a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d \\ (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \end{cases}$

(54) $\dfrac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \dfrac{a - b + kc}{a' - b' + kc'} = \dfrac{a}{a'}$, wenn $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

(55) Aus $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{c_1}{d_1}$, $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{c_2}{d_2}$, $\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{c_3}{d_3}$ folgt

$(a_1\ a_2\ a_3) : (b_1\ b_2\ b_3) = (c_1\ c_2\ c_3) : (d_1\ d_2\ d_3)$

Digitized by Google

Vierter Abschnitt. Rechnungsarten der dritten Stufe.

1. Kapitel. Potenzierung.

(56) $a \cdot a \cdot a \ldots . (m\,\text{mal}) = a^m$

(57) $a^m \cdot a^r = a^{m+r}$

(58) $a^m : a^r = a^{m-r}$, $m > r$, $\quad a^m : a^r = 1 : a^{r-m}$, $m < r$

(59) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

(60) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(61) $(a^m)^r = a^{mr}$

(62) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 \cdot (a + b)\,c + c^2$

(63) $\begin{cases} (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3 \end{cases}$

(63*) $\begin{cases} (a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3 \cdot (a + b)\,c^2 \\ + 3 \cdot (a + b)^2 c + c^3 \end{cases}$

(64) $\begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \end{cases}$

(65) $(1 + x)^n \sim 1 + nx$, wenn x hinreichend klein.

(66) $a^0 = 1$ $\qquad$ (67) $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$

2. Kapitel. Radizierung.

(68) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

(69) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

(70) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

(71) $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$ $\left(\frac{r}{m}\right.$ ganze Zahl$\left.\right)$

(72) $\sqrt[m]{a^r} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^r$

(73) $\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[ms]{a^{rs}}$

(74) $\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[mr]{a}$

(75) $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$ (auch wenn $\frac{r}{m}$ keine ganze Zahl)

(76) $\begin{cases} \sqrt{a^2} = \pm a; \quad \sqrt[2m]{a^{2m}} = \pm a \\ \sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = +a; \quad \sqrt[2m+1]{-a^{2m+1}} = -a \end{cases}$

Digitized by Google

3. Kapitel. Imaginäre und komplexe Zahlen.

(77) $ai \pm bi = (a \pm b)\,i$

(78) $(\sqrt{-a})^2 = -a, \quad (\sqrt{-1})^2 = -1$

(79) $\begin{cases} \sqrt{-a} = i\sqrt{a} \\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab} \end{cases}$

(80) $i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$

(81) $a + bi = a' + b'i$, wenn $a = a', \quad b = b'$

(82) $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i$

(83) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$

(83*) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

(84) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$

(85) $a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi); \quad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2};$

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(86) $(a + bi)(a' + b'i) = \varrho\,\varrho'(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi'))$

(87) $\dfrac{a + bi}{a' + b'i} = \dfrac{\varrho}{\varrho'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'))$

(88) $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$

$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n}$

(88*) $(a + bi)^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$

$\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$

(89) $\sqrt[3]{1} = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\sqrt{3},$

$\varepsilon_3 = \varepsilon_1^3 = 1$

(90) $\sqrt[n]{1} = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \cos\dfrac{360^0}{n} + i\sin\dfrac{360^0}{n}, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_1^k, \quad \varepsilon_n = 1$

5. Kapitel. Logarithmierung.

(91) Aus $10^x = a$ folgt $x = \log a, \quad a = 10^{\log a}$

(92) $\log(ab) = \log a + \log b$

(93) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

(94) $\log(a^m) = m\cdot\log a$

(95) $\log\sqrt[m]{a} = \dfrac{1}{m}\log a$

(96) $la = \dfrac{\log a}{\log e}, \quad \log a = \dfrac{la}{l10}, \quad l10 = 2{,}3.$

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt. Die Bestimmungsgleichungen.

2. Kapitel. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.

(97) Aus $ax + b = 0$ folgt $x = -\frac{b}{a}$

Zinsrechnung:

(98) $z = \frac{k\,p\,t}{100}$, $k = \frac{100\,z}{p\,t}$

$t = \frac{100\,z}{k\,p}$, $p = \frac{100\,z}{k\,t}$

Diskontrechnung:

(99) $s = b + d$, $d_a = \frac{b\,p\,t}{100}$, $d_i = \frac{s\,p\,t}{100}$

Gewinn- und Verlustrechnung:

(100) $v = e + g$, $v = e - s$, $\left.\begin{matrix} g \\ s \end{matrix}\right\} = \frac{e\,p}{100}$

Bewegungsaufgaben:

(101) $s = c \cdot t$, $c = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{c}$

3. Kapitel. Gleichungssysteme des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.

(102) Aus $a_1 x + b_1 y = k_1$, $a_2 x + b_2 y = k_2$

folgt $x = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

(103) $D_2 = (ab) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

(104) $D_3 = (abc) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1\,b_2\,c_3 - a_1\,b_3\,c_2 \\ + a_2\,b_3\,c_1 - a_2\,b_1\,c_3 \\ + a_3\,b_1\,c_2 - a_3\,b_2\,c_1 \end{cases}$

(105) $\begin{cases} (ab0) = 0 \\ (acb) = -(abc) \\ (abb) = 0 \\ m\,(abc) = (ma, b, c) \end{cases}$

(106) $\begin{cases} (a, b, c + d) = (abc) + (abd) \\ (a + kb, b, c) = (abc) \end{cases}$

Digitized by Google

(107) Aus $a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$,
$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$,
$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$ folgt

$$x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : D_3; \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} : D_3 \text{ usw.}$$

4. Kapitel. Gleichungen des 2. Grades.

(108) Aus $x^2 + px + q = 0$ folgt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(109) $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$

(109*) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

(110*) Ist $x + y = a, \quad xy = b$, so ist
$t^2 - at + b = 0$
$t_1 = x, \quad t_2 = y$

Sechster Abschnitt. Die Progressionen und Kettenbrüche nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Arithmetische Reihen.

(111) $u = a + (n - 1)d$

(112) $s = \frac{n(a + u)}{2}, \quad \sum_1^n k = \frac{n(a + 1)}{2}$

2. Kapitel. Geometrische Reihen.

(113) $u = a q^{n-1}$

(114) $s = \sum_{k=1}^{k=n} a q^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

(115) $\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

(116) $\sum_{k=1}^{k=\infty} a q^{k-1} = \frac{a}{1 - q}, \quad q < 1$

Digitized by Google

3. Kapitel. Zins- und Rentenrechnung.

(117) $w_1 = kq, \quad q = 1 + \frac{p}{100}$

(118) $w = kq^n$

(119) $w = kq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

(120) $kq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

(120*) $n = \frac{\log r - \log[r - k(q-1)]}{\log q}$

4. Kapitel. Kettenbrüche.

(121) $\frac{a_{n-2} + a_{n-1} \cdot q}{b_{n-2} + b_{n-1} \cdot q} = \frac{a_n}{b_n}$

(122) $a_{k-1} b_k - a_k b_{k-1} = (-1)^k$

(123) $\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{b_k b_{k+1}}$

(124) $\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^2}$

Siebenter Abschnitt. Kombinationslehre nebst Anwendungen.

1. Kapitel. Permutationen.

(125) $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$

(126) ${}_{r,p}P_n = \frac{n!}{p!\,r!}$

2. Kapitel. Kombinationen.

(127) ${}^{k}_{m}V_n = n^k$

(128) ${}^{k}_{0}V_n = n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)$

(129) ${}^{k}_{0}C_n = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \binom{n}{k}$

(130) ${}^{k}_{m}C_n = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots k} = \binom{n+k-1}{k}$

3. Kapitel. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(131) $w = \frac{g}{m}, \quad u = 1 - \frac{g}{m}$

(132) $w_z = \frac{g_1}{m_1} \cdot \frac{g_2}{m_2} \cdot \frac{g_3}{m_3} \cdots\cdots \frac{g_n}{m_n}$

Digitized by Google

4. Kapitel. Der binomische Lehrsatz.

(133) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$

(134) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(135) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(136) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(137) $S_n = \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}b + \binom{n}{3}c + \cdots$ (Arithm. Reihe)

(138) $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 \cdots + \binom{n}{n}x^n \binom{\text{n pos.}}{\text{ganz}}$

(139) $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$

(140) $(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n b^n$

Achter Abschnitt. Versicherungsrechnung.

1. $d_n = \frac{l_n}{q^n}$
2. $s_n = d_{100} + d_{99} + \cdots + d_{n+1} + d_n$
3. $d_n = s_n - s_{n+1}$

Neunter Abschnitt. Kubische Gleichungen.

1. $x^3 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \varepsilon$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = \varepsilon^2$
2. $x^3 = a$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{a}$, $x_2 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{a}$
3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,
   $-x_1 - x_2 - x_3 = a$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$, $-x_1x_2x_3 = c$
4. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $y = x - \frac{a}{3}$,
   $y^3 + py + q = 0$, $y = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$,
   $z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$
5. $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$,
   wenn $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$

Digitized by Google

6. $y_1 = 2\sqrt{-p/3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$, $\cos\varphi = \frac{-q/2}{(\sqrt{-p/3})^3}$, wenn $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$

$y_2 = -2\sqrt{-p/3}\cdot\cos\left(60^0-\frac{\varphi}{3}\right)$

$y_3 = -2\sqrt{-p/3}\cdot\cos\left(60^0+\frac{\varphi}{3}\right) = 2\sqrt{-p/3}\cdot\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)$

Zehnter Abschnitt. Differentialrechnung.

1. Kapitel. Differentialquotienten.

1. $\frac{da}{dx} = 0$

2. $\frac{dx^n}{dx} = n\cdot x^{n-1}$, $\frac{d\,ax^n}{dx} = a\cdot n\cdot x^{n-1}$

3. $\frac{de^x}{dx} = e^x$

4. $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d\log x}{dx} = \frac{\log e}{x}$

5. $\frac{da^x}{dx} = a^x la$

6. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$

7. $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$

8. $\frac{dtgx}{dx} = 1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$

10. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

11. $\frac{duv}{dx} = v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx} = uv\left(\frac{du}{dx}:u+\frac{dv}{dx}:v\right)$

12. $\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right):v^2 = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{dx}:u-\frac{dv}{dx}:v\right)$

13. $\frac{dz^n}{dx} = n\cdot z^{n-1}\frac{dz}{dx}$, $\frac{dlz}{dx} = \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx}$

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$

15. $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$; wenn $f=0$ ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$

Digitized by Google

2. Kapitel. Reihen.

1. Mac Laurinsche. $f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots$

2. Taylorsche. $f(x+h)=f(h)+\frac{x}{1!}f'(h)+\frac{x^2}{2!}(f''h)+\frac{x^3}{3!}f'''(h)+\cdots$

3. $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2{,}718281828\cdots$

4. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

5. $e^x=\cos x+i\sin x, \qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$

6. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

7. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

8. $l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$

9. $(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots$ $\binom{n\text{ ratio-}}{\text{nal}}$

10. $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$

3. Kapitel. Anwendungen der Differentialrechnung.

1. Maximum $f'(x)=0$, $f''(x)$ negativ
2. Minimum $f'(x)=0$, $f''(x)$ positiv
3. Wendepunkt $f''(x)=0$, $f'''(x)\gtrless 0$
4. $f(a)=0$, $g(a)=0$, $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$
5. Tangente im Punkt $x|y$ $\frac{Y-y}{X-x}=\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$

Digitized by Google

Sterblichkeitstafel der Assicurazioni Generali in Trieſt.

n	l_n	s_n	n	l_n	s_n
0	10000	166193	50	4975	9440
1	8517	156193	51	4895	8740
2	7954	148003	52	4812	8078
3	7706	140650	53	4727	7452
4	7576	133799	54	4637	6860
5	7493	127323	55	4544	6303
6	7428	121164	56	4447	5777
7	7370	115294	57	4346	5283
8	7316	109693	58	4240	4818
9	7262	104348	59	4130	4382
10	7210	99245	60	4015	3974
11	7158	94375	61	3895	3592
12	7106	89725	62	3770	3236
13	7054	85287	63	3640	2905
14	7003	81050	64	3504	2597
15	6952	77006	65	3363	2312
16	6901	73146	66	3217	2049
17	6850	69462	67	3067	1808
18	6799	65946	68	2911	1586
19	6748	62589	69	2751	1384
20	6698	59386	70	2587	1200
21	6647	56330	71	2420	1034
22	6597	53413	72	2250	884,7
23	6546	50629	73	2079	751,1
24	6496	47973	74	1907	632,5
25	6445	45439	75	1735	527,8
26	6395	43021	76	1566	436,2
27	6344	40715	77	1400	356,7
28	6293	38514	78	1238	288,4
29	6242	36416	79	1083	230,3
30	6190	34415	80	935	181,5
31	6138	32506	81	797	140,9
32	6086	30686	82	668	107,7
33	6033	28951	83	552	80,84
34	5980	27298	84	447	59,57
35	5926	25722	85	355	43,00
36	5872	24220	86	276	30,35
37	5816	22789	87	209	20,90
38	5760	21426	88	154	14,01
39	5703	20129	89	111	9,12
40	5645	18893	90	77	5,75
41	5586	17717	91	51	3,50
42	5525	16599	92	33	2,05
43	5463	15535	93	20	1,15
44	5399	14523	94	12	0,62
45	5334	13562	95	7	0,31
46	5266	12649	96	4	0,15
47	5197	11782	97	2	0,07
48	5125	10959	98	1	0,03
49	5051	10179	99	0	0,01
50	4975	9440	100	0	

Druck von Karl Marquart in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch.

Für den Unterricht in der Mittel- und Oberstufe höherer Lehranstalten bearbeitet von Dr. **F. Niemöller**, Realschuldirektor, und **P. Dekker**, Oberlehrer.

Heft I: Pensum der Untertertia. (Tertia der Realschulen.) Kart. 1 *M.* — Heft II: Pensum der Obertertia und Untersekunda. (Sekunda und Prima der Realschulen.) Kart. 1,60 *M.* — Heft III für Realgymnasien und Oberrealschulen: Pensum der Obersekunda. Kart. 1,25 *M.* — Heft III für Gymnasien: Pensum der Obersekunda und der beiden Primen. Kart. 1,40 *M.* — Heft IV: Pensum der beiden Primen des Realgymnasiums und der Oberrealschule. Kart. 2,50 *M.*

Dieses neue Unterrichtsmittel soll nicht nur als Aufgabenbuch, sondern auch als Lehrbuch dienen; deshalb sind die für das System notwendigen Begriffe und Sätze den einzelnen Kapiteln in knapper Fassung vorangestellt. Besondere Berücksichtigung haben die Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben gefunden.

Prof. Dr. Th. Wimmenauers Arithmetik.

Die Elemente der Arithmetik für Gymnasien. Nach den preußischen Lehrplänen bearbeitet. Mit 3 Figuren. 2. Aufl

Arithmetische Aufgaben nebst Lehrs
ßischen Lehrpläne von 1901 vervo

☛ Im Anschluß an des Verfassers Arithm

Lehrbücher von D

Die Elemente der Arithmetik. E
6-klassigen höheren Lehranstalten.
rücksichtigung der preußischen Lehrp
Dr. Kreuschmer. Kart. 1 *M.*

Die Elemente der Geometrie. Ein
richt an 6-klassigen höheren Lehranst
pläne vom Jahre 1901 bearbeitet
I. Teil: **Planimetrie.** 8., verb
II. Teil: **Trigonometrie und Ste**
Winkelmeßapparat. II.
funktionen. 5., vermehr

Uteschers Rechenau

Heft 1 (Sexta): 3. Auflage. 40
Heft 3 (Quarta): 3. Auflage. 40 *Pf*

☛ Mit behördlicher Genehmigung i

Schriften von

Rechenbuch für Lehrerbildungsanstal
1. Juli 1901. In zwei Teilen.
I. Teil (in drei Heften): Für Pr
1. Heft: Der Rechenstoff für die
2. Heft: Der Rechenstoff für die
3. Heft: Der Rechenstoff für die 1. Klasse. 3. Auflage. Geb. 1,50 *M.*
II. Teil (in einem Bande): Für Seminare. 3. Auflage. Geb. 2,50 *M.*

Raumlehre für Lehrerbildungsanstalten. In Gemeinschaft mit Seminar-Direktor **K. Backhaus** bearbeitet nach dem Lehrplan vom 1. Juli 1901. In zwei Teilen.
I. Teil: Planimetrie (Flächenlehre). In zwei Abteilungen.
1. Abtlg.: Der Lehrstoff für die Präparandenanstalt. Mit 93 Fig. 8. Aufl. Geb. 1,65 *M.*
2. Abtlg.: Der Lehrstoff für das Seminar. Mit 41 Figuren. 7. Aufl. Geb. 1,35 *M.*
II. Teil: Stereometrie und Trigonometrie. (Körperlehre und Dreiecksrechnung.) 6., durchgesehene Auflage. Mit 46 Figuren im Text. Geb. 2,50 *M.*

Claußen, Dr. **F.**, Direktor, **Leitfaden der Planimetrie.** Mit 120 Fig. 2. Aufl. Kart. 1 *M.*
☛ Trägt den besonderen Bedürfnissen der höheren Handelsschulen Rechnung.

Simon, Dr. **Max**, **Geometrie für höhere Bürgerschulen (Realschulen) und Lehrer-Seminare.** Ein methodischer Leitfaden in heuristischer Darstellung. Mit 104 Figuren im Text. 5., verbesserte

Digitized by Google

Math 499.08
Kambly-Langguth Arithmetik und alge
Cabot Science 003298562
3 2044 091 893 768